Université de Bordeaux | **L3 - Algorithmique matricielle**
Mathématiques | 2024–2025

FEUILLE D'EXERCICES n° 3

Formes quadratiques, produits scalaires

Exercice 1 – Montrer que les applications q de E dans $\mathbb{R}$ suivantes sont des formes quadratiques. Pour chacune d'entre elles, indiquer si cette forme quadratique est positive, et si elle est définie positive.

1) $E = \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$.

2) $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1x_2$ (où $x = (x_1, x_2)$).

3) $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ (où $x = (x_1, x_2)$) (pour la positivité de q, on peut utiliser le discriminant d'un polynôme du second degré).

4) $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$ (où $x = (x_1, x_2)$).

Exercice 2 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1) Soient α_1 et α_2 deux réels. Soient f_1 et f_2 deux formes bilinéaires symétriques sur E. Montrer que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ est une forme bilinéaire symétrique.

2) Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur E. Montrer que $\alpha q_1 + \alpha_2 q_2$ est une forme quadratique.

3) Que peut-on dire de l'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E ?

Exercice 3 – Montrer que les applications q suivantes sont des formes quadratiques et donner leur forme bilinéaire symétrique associée. Indiquer ensuite si q est positive et si elle est définie positive.

1) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} q \ : \ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1 \ldots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} q \ : \ \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \int_0^1 P(t)^2 dt \end{aligned}$$

Indications. On rappelle le résultat d'analyse suivant.

Soit f une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+$. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a, b]$.

On rappelle aussi qu'un polynôme non nul de $\mathbb{R}[x]$ a un nombre fini de racines.

Exercice 4 – Soit $E = \mathbb{R}^n$. On définit l'application q par

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^2$$

où (a_i) vérifie

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 < 1.$$

1) Montrer que q est une forme quadratique.

2) Montrer que E muni de q est euclidien.

Exercice 5 – Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit sur E l'application q par

$$q(P) = P(0)^2 + \int_0^1 (P'(t))^2 dt.$$

1) Montrer que E muni de q est un espace euclidien.

2) Déterminer une base orthogonale de E formée de polynômes unitaires.

Exercice 6 – Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. Soit b la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $b(x, y) = \dfrac{1}{4}\,(q(x + y) - q(x - y))$.

2) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $q(x + y) + q(x - y) = 2(q(x) + q(y))$.

3) Celle égalité est appelée identité du parallélogramme. Pourquoi ?

Exercice 7 – Soit $E = \mathbb{R}^n$. On définit l'application q par

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^2$$

où (a_i) vérifie $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^2 < 1$.

1) Montrer que q est une forme quadratique (ne pas développer le carré ; pour trouver la forme bilinéaire symétrique associée, on peut utiliser l'identité $(A+B)^2 - A^2 - B^2 = 2AB$).

2) Montrer que E muni de q est euclidien (pour montrer que q est définie positive, on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 8 – Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^n x_i^2$.

2) Déterminer l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = n \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Exercice 9 – Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique positive sur E. On note b la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$

$$b(x,y)^2 \leqslant q(x)q(y)$$

(c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui n'a été démontrée en cours que dans le cas des formes quadratiques définies positives).

2) Donner un exemple où $b(x,y)^2 = q(x)q(y)$ et où x et y ne sont pas colinéaires.

3) Donner un exemple où q n'est plus positive et où $b(x,y)^2 > q(x)q(y)$.