Université de Bordeaux
Mathématiques

L3 – Algorithmique matricielle
2024–2025

FEUILLE D'EXERCICES n° 5

Orthogonalité, matrices de Gram, matrices symétriques

Exercice 1 – Soit $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire défini par $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$.

1) Soient $b_1 = (1,1)$ et $b_2 = (1,0)$. Montrer que $b = (b_1, b_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) En donner l'orthogonalisée b^* de Gram-Schmidt. En déduire son orthonormalisée de Gram-Schmidt b'.

3) Quelle est la matrice de passage de b' à b ?

4) Calculer les coordonnées de $(2,1)$ dans la base b'.

Exercice 2 –

1) Même exercice sur $\mathbb{R}^3$, avec $(x|y) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ et les vecteurs $b_1 = (1,1,0)$, $b_2 = (0,1,1)$ et $b_3 = (1,0,1)$ (on calculera les coordonnées de $x = (1,1,1)$ dans la base b').

2) Soit $F = \mathrm{Vect}(b_1, b_2)$. Soient p la projection orthogonale sur F et p' la projection orthogonale sur $F^\perp$. Déterminer $p(x)$ et $p'(x)$.

3) Calculer la distance de x à F.

Exercice 3 – On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire

$$(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

1) Soit $F = \mathrm{Vect}((1,1,1,1),(1,1,0,0))$. Déterminer une base orthonormale de F.

2) Soit p la projection orthogonale sur F, et soit $x = (0,0,0,1)$. Déterminer $p(x)$. Calculer la distance $d(x,F)$ de x à F.

3) Calculer $d(x, F^\perp)$.
Indication. Pas besoin de déterminer $F^\perp$.

Exercice 4 – [Inégalité de Hadamard]
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que

$$|\det A| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Dans le cas où A est inversible, on pourra utiliser l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ formée par les vecteurs colonnes de A.

2) Montrer que

$$|\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Exercice 5 – Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3$$

Quelle est la matrice de Gram de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour q ?

Exercice 6 – Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle est la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par M (c'est-à-dire telle que M soit la matrice de Gram de la base canonique) ?

Exercice 7 – Soit $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ positive.

1) Montrer que pour tout i, $a_{ii} \geqslant 0$.

2) Montrer que $\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i a_{ii}$.

Exercice 8 – [Décomposition QR] On note $\mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{T}_{sup,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

1) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{T}^{++}_{\mathrm{sup},n}(\mathbb{R})$ uniques telles que $A = QR$ (on pourra utiliser une orthonormalisée de Gram-Schmidt). On appelle cette factorisation la décomposition QR de A.

2) Donner la décomposition QR de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 – Soient E un espace hermitien, h son produit scalaire hermitien et q sa forme quadratique hermitienne associée. Pour tout $x \in E$, on note $||x|| = \sqrt{q(x)}$. Montrer que $|| \cdot ||$ est une norme.