Université de Bordeaux
Mathématiques

L3 – Algorithmique matricielle
2024–2025

FEUILLE D'EXERCICES n° 6
Méthodes itératives (travail sur machine)

Exercice 1 – [Suites définies par une récurrence $X^{(k+1)} = KX^{(k)} + C$]

1) Écrire une fonction `Iteration` qui étant donnés $K \in M_n(\mathbb{R})$, C et $X^{(0)} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ calcule le ℓ-ème terme de la suite définie par la relation

$$X^{(k+1)} = KX^{(k)} + C \quad \text{pour tout } k \leqslant 0\ .$$

Dans la suite, sauf mention contraire, on fera tous les calculs dans $\mathbb{R}$, en utilisant donc des approximations. Pour cela, il suffira de définir la valeur initiale $X^{(0)}$ de la suite à coefficients dans $\mathbb{R}$.

2) Appliquer la fonction `Iteration` à

$$K = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})\ ,$$

$C = (0, 0, 0)$ et $X^{(0)} = (1, -1, 0)$. La suite $(X^{(k)})$ converge-t-elle ?

3) Essayer encore cette fonction avec les mêmes paramètres mais en prenant diverses valeurs de $X^{(0)}$ prises au hasard dans $M_3(\mathbb{R})$. Que constate-t-on ?

Le cours dit qu'une telle suite converge pour tout vecteur initial $X^{(0)}$ si et seulement si $\rho(K) < 1$. Commenter les résultats obtenus.

4) Essayer encore avec $X^{(0)} = (1, -1, 10^{-10})$.

5) On prend maintenant $C = (2, 1, 1)$ et $X^{(0)} = \frac{2}{5}(7, -8, -3)$. Appliquer `Iteration` à ces valeurs en faisant les calculs dans $\mathbb{Q}$ avec 100 itérations, puis calculer une approximation numérique de la valeur obtenue (voir la fonction `numerical_approx`). En temps normal, on ne ferait pas les calculs dans $\mathbb{Q}$, mais de façon approchée dans $\mathbb{R}$! Il s'agit juste d'une expérience.

Si la suite converge, elle doit converger vers $(I_3 - K)^{-1}C$. Est-ce cohérent avec le résultat obtenu ?

6) Appliquer à nouveau `Iteration` aux mêmes valeurs, mais en faisant tous les calculs dans $\mathbb{R}$.

7) Appliquer la fonction `Iteration` à

$$K = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et diverses valeurs de C et $X^{(0)}$. La suite $(X^{(k)})$ converge-t-elle ? Calculer $\rho(K)$ (en utilisant `eigenvalues`).

Exercice 2 – [Méthode de Jacobi]
On s'intéresse à l'équation $AX = B$, où $A = (a_{i,i}) =\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On veut construire une suite $(X^{(k)})$ de vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ qui converge vers la solution.

Notation. On décompose la matrice A sous la forme $A = L + D + U$ où L est triangulaire inférieure à diagonale nulle, U est triangulaire supérieure à diagonale nulle et où D est diagonale. Autrement dit :

$$L_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad D_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad U_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quitte faire des permutations sur les lignes, on peut supposer que $a_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in [[1, n]]$ (puisque $\det A \neq 0$). On suppose donc que D est inversible.

On part d'un vecteur initial $X^{(0)}$ quelconque et on définit la suite $X^{(k)}$ par la relation de récurrence

$$X^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)X^{(k)} + D^{-1}B$$

que l'on peut encore écrire

$$X^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)X^{(k)} + D^{-1}B$$

Si l'on note $X_i^{(k)}$ le i-ème coefficient de $X^{(k)}$, cela donne

$$X_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} X_j^{(k)} \right). \tag{1}$$

1) Écrire une fonction `Jacobi` qui étant donnés A, B, un vecteur initial $X^{(0)}$ et k cherche à calculer la solution de $AX = B$ par la méthode de Jacobi en utilisant k itérations.

2) Appliquer cette méthode à

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifiera que le vecteur obtenu est bien une approximation de la solution.

3) Écrire une fonction `Jacobi2` qui applique encore la méthode de Jacobi avec la modification suivante. La fonction ne prendra plus le nombre d'itérations k en paramètres, mais un réel positif ε et elle rendra $X^{(k)}$ dès que

$$||X^{(k)} - X^{(k-1)}||_\infty < \varepsilon$$

La fonction devra aussi donner le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à cette inégalité.

Appliquer cette nouvelle fonction à A et B.

4) Appliquer cette fonction à diverses valeurs de A obtenues de la façon suivante. Choisir A_0 au hasard dans $M_n(\mathbb{R})$. Par défaut, les coefficients sont pris dans $]-1,1[$. Prendre alors $A = A_0 + nI_n$. Alors A est à diagonale strictement dominante. On verra en cours que dans ce cas, la méthode converge. Le vecteur B et le vecteur initial pourront être choisis au hasard dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 – [La méthode de Gauss-Seidel]
C'est une transformation de la méthode de Jacobi. On reprend l'égalité (1) avec la modification suivante : on calcule les coordonnées $X_i^{(k+1)}$ pour i allant de 1 à n, en changeant les $X_j^{(k)}$ par $X_j^{(k+1)}$ quand celui-ci a déjà été calculé, c'est-à-dire quand $j < i$.

$$(2) \qquad X_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{i,j} X_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{i,j} X_j^{(k)} \right).$$

Reprendre les questions de l'exercice précédent en utilisant la méthode de Gauss-Seidel à la place de celle de Jacobi. On appellera `GS` et `GS2` les fonctions correspondantes.

On comparera les performances des deux méthodes en terme de vitesse de convergence.

Exercice 4 – Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Expérimenter les fonctions `Jacobi` et `GS` sur les équations $AX = B$ et $A'X = B$ en prenant un vecteur initial $X^{(0)}$ choisi à votre guise.

Exercice 5 – [Relaxation]
La relaxation utilise une méthode itérative comme la méthode de Jacobi ou celle de Gauss-Seidel pour en définir une nouvelle. On choisit donc ici l'une de ces deux méthode que l'on appelle méthode de base.

On fixe un paramètre réel $\omega > 0$. Admettons que $X^{(k)}$ ait déjà été calculé. Soit $\overline{X^{(k+1)}}$ le vecteur que l'on obtiendrait en utilisant la méthode de base choisie (Jacobi ou Gauss-Seidel). On définit alors $X^{(k+1)}$ par

$$X_i^{(k+1)} = \omega \overline{X^{(k+1)}} + (1-\omega) X_i^{(k)}.$$

Ainsi, si la méthode de base est la méthode de Jacobi, on utilise la récurrence (1) et on obtient la nouvelle relation de récurrence

$$(3) \qquad X_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} X_j^{(k)} \right) + (1-\omega) X_i^{(k)}.$$

Si la méthode de base est la méthode de Gauss-Seidel, on utilise la récurrence (2) et on obtient

$$(4) \quad X_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{i,j} X_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{i,j} X_j^{(k)} \right) + (1-\omega) X_i^{(k)}.$$

1) Écrire une fonction pour la relaxation à partir de Gauss-Seidel. Cette fonction prendra en donnée une matrice A, un vecteur B, un vecteur initial $X^{(0)}$, un réel ω et un entier k. En sortie, il donnera le vecteur $X^{(k)}$ obtenu après k itérations.

2) Essayer la fonction obtenue sur la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

et n'importe quels B et $X^{(0)}$ en cherchant à voir de façon expérimentale pour quels ω la méthode converge.

Exercice 6 – [Calcul de valeurs propres et vecteurs propres]

Soit $||\cdot||$ une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $X^{(0)} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $||X^{(0)}|| = 1$. On définit les suites $(X^{(k)})$ et $(Y^{(k)})$ en posant

$$Y^{(k+1)} = AX^{(k)}, \quad X^{(k+1)} = \frac{1}{||Y^{(k+1)}||} Y^{(k+1)}.$$

1) On choisit comme norme la norme $||\cdot||_\infty$. Écrire une fonction `Puissances` qui étant donnés A, $X^{(0)}$ et k rend $||Y^{(k+1)}||_\infty$, $X^{(k)}$ et $Y^{(k+1)}$.

2) Appliquer cette fonction à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Vérifier les faits suivants (on pourra utiliser `eigenvalues`). Soient λ la valeur propre de plus grand module et k un entier assez grand,

(1) $||Y^{(k+1)}||_\infty \approx \rho(A)$,

(2) $\dfrac{Y^{(k+1)}[0]}{X^{(k)}[0]} \approx \dfrac{Y^{(k+1)}[1]}{X^{(k)}[1]} \approx \dfrac{Y^{(k+1)}[2]}{X^{(k)}[2]} \approx \lambda$,

(3) $AX^{(k)} \approx \lambda X^{(k)}$.

3) On pose $u = X^{(k)}$. Trouver $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $u = Qe_1$. En déduire $A_1 \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}AQ$ soit approximativement de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & l \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$. Grâce à `Puissances`, trouver la valeur propre de A_1 de plus grand module et un vecteur propre associé.

4) Trouver la dernière valeur propre par la même méthode. Pouvait-on la trouver plus simplement ?