Université de Bordeaux
Mathématiques

L3 – Algorithmique matricielle
2024–2025

FEUILLE D'EXERCICES n° 8

Espaces hermitiens, Normes, Normes matricielles

Exercice 1 – Soient E un espace hermitien, h son produit scalaire hermitien et q sa forme quadratique hermitienne associée. Pour tout $x \in E$, on note $||x|| = \sqrt{q(x)}$. Montrer que $||\cdot||$ est une norme.

Exercice 2 – Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ Pour tout x dans K^n, on pose

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad ||x||_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i| \quad ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Montrer que ces trois expressions définissent des normes sur K^n.

Exercice 3 – Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soient $||\ ||_E$ une norme sur E, $||\ ||_F$ une norme sur F et u une application linéaire de E dans F. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) u est continue.
(2) u est continue en 0.
(3) Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$,
$$||u(x)||_F \leqslant k||x||_E.$$
(4) u est lipschitzienne, c'est-à-dire : il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x, y \in E$,
$$||u(x) - u(y)||_F \leqslant k||x - y||_E.$$

Exercice 4 – L'application ρ est elle une norme de $M_n(K)$?

Exercice 5 – Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$. Montrer les égalités

$$|||A|||_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad \text{et} \quad |||A|||_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|.$$

Exercice 6 – On considère l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$||A|| = \sum_{i,j} |a_{ij}|.$$

1) Montrer que $||\ ||$ est une norme sur $M_n(K)$.

2) Montrer que si N est une norme de $M_n(K)$ subordonnée à une norme de $M_{n,1}(\mathbb{C})$, alors $N(I_n) = 1$.

3) Qu'en déduire sur $||\ ||$?

4) La norme $||\ ||$ est elle une norme matricielle ?

Exercice 7 – Donner un exemple de norme de $M_n(\mathbb{C})$ qui n'est pas matricielle.

Exercice 8 – Soit $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose $N(v) = ||Qv||_\infty$.

1) Montrer que N définit une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$.

2) On note N' sa norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $N'(M) = |||QMQ^{-1}|||_\infty$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 9 – Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$. On se propose ici de démontrer que

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^t\overline{A}A)}.$$

1) Montrer qu'il existe une matrice unitaire U et une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux positifs ou nuls telles que

$${}^t\overline{A}A = {}^t\overline{U}DU.$$

2) Montrer que

$$\sup_{||x||_2=1} ||Ax||_2^2 = \sup_{||y||_2=1} {}^t\overline{y}Dy = \rho(D)$$

Conclure.

Exercice 10 –

1) Montrer qu'à toute norme matricielle on peut associer une norme de $\mathbb{C}^n$ avec laquelle elle est compatible.

2) Montrer que pour toute norme matricielle N de $M_n(\mathbb{C})$ et toute matrice A on a

$$\rho(A) \leqslant N(A).$$

3) Soit $N(A) = \max_{i,j} |a_{i,j}|$. Est-ce une norme sur $M_n(\mathbb{C})$? Montrer que si $n \geqslant 2$, il existe $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) > N(A)$.

Exercice 11 – Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Montrer que si $A \in M_n(K)$ et $B \in \mathrm{GL}_n(K)$, le polynôme caractéristique de AB est égal à celui de BA.

2) Montrer que le résultat reste vrai si $B \in M_n(K)$ n'est pas inversible (on pourra utiliser une suite de la forme $B + \dfrac{1}{k}I_n$).

3) Montrer ce résultat dans le cas plus général où K est un anneau commutatif quelconque, en calculant le produit suivant.

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n - AB & -A \\ 0 & XI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 – On considère l'application de $M_n(K)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$||A||_s = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^t\overline{A}A)}.$$

1) Montrer que

$$||A||_s = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$

2) Montrer que $||\ ||_s$ est une norme de $M_n(K)$. On l'appelle norme de Schur.

3) Montrer que $||\ ||_s$ n'est pas une norme induite par une norme de K^n.

4) Montrer que $||\ ||_s$ est une norme matricielle.

5) Montrer que la norme de Schur est compatible avec $||\ ||_2$.

6) montrer que

$$\rho(A) \leqslant \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$