Université de Bordeaux — **L3 – Algorithmique matricielle**
Mathématiques — 2024–2025

FEUILLE D'EXERCICES n° 9
(travail sur machine)

Dans l'énoncé, les indices de matrices et de vecteurs commencent à 0.

Indications pour les commentaires sur `Jupyter`. Sur `Jupyter`, on trouve dans le bandeau d'outils un onglet pour le "mode". Quand ce mode est `code`, on peut faire des calculs.

Si on choisit le mode `markdown`, alors on peut mettre un commentaire. Pour écrire un grand titre : `# Titre`. Un plus petit titre : `## Titre`. Plus il y a de `#`, plus le titre est petit.

Il est aussi possible de faire un travail sur un éditeur de texte. Dans ce cas aussi, une rédaction soignée est demandée.

Exercice 1 – [Systèmes triangulaires]

1) Soit $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient A une matrice triangulaire supétieure de $\mathrm{GL}_n(K)$ et $B \in M_{n,1}(K)$. Pour résoudre l'équation $AX = B$, on peut par exemple utiliser la fonction suivante.

```
def TriangleSup(K,A,B):
    n=B.length()
    X=vector(K,n)
    for i in range(n-1,-1,-1):
        X[i]=A[i,i]^(-1)*(B[i]-sum([A[i,j]*X[j] for j in range(n-1,i-1,-1)]))
    return X
```

Programmer une telle fonction `TriangleSup` qui prend en paramètres K, A et B et qui rend la solution de l'équation $AX = B$.

On pourra tester cette fonction sur $K = \mathbb{Q}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Écrire la fonction `TriangleInf(K,A,B)` qui s'applique à une matrice A triangulaire inférieure. Dans ce cas, i varie de 0 à $n-1$ et on utilise les X_j pour $j \in [[0, i-1]]$ déjà calculés.

$$X_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left(B_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{i,j} X_j \right)$$

On pourra appliquer `TriangleInf` à $K = \mathbb{Q}$, la transposée ${}^tA$ de A et B.

Exercice 2 – [Décomposition de Cholesky]

Dans cet exercice et le suivant, on demande des calculs dans $\mathbb{R}$.

1) Écrire une fonction `Cholesky` qui prend une matrice S symétrique définie positive en entrée et rend l'unique matrice R de $\mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tRR$.

On pourra utiliser l'algorithme donné par la proposition 8.3.1, c'est à dire, en calculant pour m allant de 0 à $n-1$ et j de $m+1$ à $n-1$:

$$r_{m,m} = \sqrt{s_{m,m} - \sum_{k=0}^{m-1} r^2_{k,m}} \quad \text{et} \quad r_{m,j} = \frac{1}{r_{m,m}}\left(s_{m,j} - \sum_{k=0}^{m-1} r_{k,m}r_{k,j}\right).$$

On pourra essayer la fonction `Cholesky` sur la matrice $S = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2) Appliquer cette fonction à $S = (s_{ij}) \in M_9(\mathbb{R})$ où pour tout $(i, j) \in [[0, 8]]^2$,

$$s_{ij} = \min(i, j) + 1$$

3) Construire une matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ au hasard et appliquer la fonction `Cholesky` à la matrice $S = {}^tAA$.

Exercice 3 – [Problème des moindres carrés]

Soient $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_i) \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $m \geqslant n$ et que $\operatorname{rg} A = n$. L'équation $AX = B$ n'a pas nécessairement des solutions. On peut alors essayer de trouver une *solution approchée* : on va chercher $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $||AX - B||_2$ est minimale. Cela revient à dire que la somme

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j}x_j - b_i\right)^2$$

est minimale. Cette question est appelée *problème des moindres carrés*.

On admet le théorème suivant.

Théorème 1. *La norme $||AX - B||_2$ est minimale si et seulement si*

$$^tAAX = {}^tAB \tag{1}$$

Soit $S = {}^tAA \in M_n(\mathbb{R})$. Alors S est symétrique positive. De plus, comme $\operatorname{rg} A = n$, on peut vérifier que S est définie positive. Ainsi, on peut lui appliquer la fonction `Cholesky` pour trouver $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ vérifiant $S = {}^tRR$. Le problème des moindres carrés se ramène alors à la résolution de deux systèmes triangulaires

$$^tRY = {}^tAB \text{ et } RX = Y$$

1) Soient les points de $\mathbb{R}^2$ suivants. $P_0 = (1, -1.9)$, $P_1 = (2, 1.01)$, $P_2 = (3, 4.21)$, $P_3 = (4, 6.8)$, $P_4 = (5, 5.9)$. On cherche une droite $\mathcal{D}$ (d'équation $y = a_1x + a_0$) qui approche au mieux ces points "au sens des moindres carrés". C'est-à-dire que l'on cherche $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$

tel que la somme $\sum_{i=0}^{4} ((a_0 + a_1 P_i[0]) - P_i[1])^2$ est minimale. Traduisons cela matriciellement. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1.9 \\ 1.01 \\ 4.21 \\ 6.8 \\ 5.9 \end{pmatrix}$. On cherche $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $||AX - B||_2$ est minimale.

Trouver cet élément X, en utilisant uniquement les fonctions `Cholesky`, `TriangleInf` et `TriangleSup` (et bien sûr des fonctions usuelles de sage comme la transposée et la multiplication des matrices).

2) Dessiner sur un même graphe l'ensemble des points P_i et la droite $\mathcal{D}$. Pour cela, si $f = a_1 x + a_0$ et si P est la liste des P_i, il suffit d'écrire

```
Droite=plot(f,(x,0,5))
Points=point(P,color="red")
Droite+Points
```

Bien sûr, les couleurs peuvent être choisies au goût de chacune et chacun.

3) Soient les points $P_0 = (1, 1.96)$, $P_1 = (2, -0.12)$, $P_2 = (3, 0.55)$, $P_3 = (4, 2.84)$, $P_4 = (5, 8.16)$. En suivant la même méthode que précédemment, trouver la parabole (d'équation $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$) qui approche au mieux ces points au sens des moindres carrés.

4) Dessiner ces points et cette parabole sur un graphe.

5) Construire d'autre exemples.