Université de Bordeaux
Mathématiques

L3 – Algorithmique matricielle
2024–2025

FEUILLE D'EXERCICES n° 10
Méthodes itératives et factorisation

Exercice 1 – Le but de cet exercice est de montrer sur des exemples qu'on ne peut rien dire en général de la comparaison entre les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces matrices, calculer le rayon spectral de la matrice d'itération correspondant à la méthode de Jacobi, puis de Gauss-Seidel (c'est-à-dire $-D^{-1}(L+U)$ et $-(D+L)^{-1}U$ avec les notations du cours).

Exercice 2 – Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 \\ -1/2 \end{pmatrix}$. On considère la méthode itérative définie par $X^{(k+1)} = AX^{(k)} - C$ et la donnée de $X^{(0)}$.

1) Vérifier que si $(X^{(k)})$ converge, alors elle converge vers $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

2) On choisit pour initialiser les itérations le vecteur $\left(\begin{smallmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $X^{(k)}$ en fonction de ε. La suite $(X^{(k)})$ converge-t-elle vers X ?

3) On choisit maintenant $\left(\begin{smallmatrix} 1+2\varepsilon \\ 1-9\varepsilon \end{smallmatrix}\right)$. Que se passe-t-il ?

Exercice 3 – Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante et $B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On utilise la méthode de Jacobi pour résoudre $AX = B$. Montrer que cette méthode converge pour tout vecteur initial.

Exercice 4 – Soit $S = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Après avoir justifié que cette matrice est définie positive, donner sa factorisation de Cholesky.

Exercice 5 – Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1) En appliquant la méthode des coefficients indéterminés, déterminer la décomposition de Cholesky $S = {}^tRR$ (si elle existe). Montrer que S est symétrique définie positive.

2) En déduire une décomposition $S = {}^tUDU$ où $U \in \mathcal{T}^1_{sup,n}(\mathbb{R})$ et où D est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. On pourra pour cela définir $d = \mathrm{Diag}(r_{1,1}, r_{2,2}, r_{3,3})$ où les $r_{i,j}$ sont les coefficients de R, $U = d^{-1}R$ et $D = d^2$.