Collège sciences et technologies

Année : 2016/2017
Session 1 de décembre 2016

# Master Mathématiques Appliquées, Statistique

$1^{ère}$ année

# UE MS705EX
# Approximation des équations aux dérivées partielles 1
## Charles-Henri Bruneau

(Durée : 3 heures)
Aucun matériel électronique n'est autorisé
Aucun document n'est autorisé

- **EXERCICE 1**

Soient $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ et $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, on veut résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

On construit sur $\Omega$ un maillage cartésien uniforme de pas $h = \frac{1}{N}$ et on discrétise $(\mathcal{P})$ successivement par une méthode aux différences finies aux sommets et aux volumes finis de type "vertex-centered" avec inconnues aux sommets.

1. En différences finies, trouver l'équation générique en un sommet intérieur $(ih, jh)$ pour une approximation par différences finies centrées au second ordre.
2. Trouver l'équation en un sommet du bord $(ih, 0), 1 \leq i \leq N-1$.
3. Décrire la matrice, ses propriétés et en déduire son inversibilité.
4. Pour résoudre à l'aide de volumes finis, on décide de réécrire le problème $(\mathcal{P})$ sous forme divergence. Montrer que $-\Delta u = -div(\nabla u)$ et écrire le problème correspondant.
5. En utilisant le théorème de la divergence, trouver l'équation générique en un sommet intérieur $(ih, jh)$ en utilisant des formules du trapèze et des différences finies centrées au second ordre quand nécessaire.
6. Trouver l'équation en un sommet du bord $(ih, 0), 1 \leq i \leq N-1$.
7. Décrire la matrice et la comparer avec la matrice obtenue en différences finies.

.../...

- **EXERCICE 2**

Soient $f \in C^0([0,1])$ et $T > 0$ ; on considère le problème d'évolution

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_{xx} u(x,t) = f(x) \text{ dans } (0,1) \times (0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \text{ dans } (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } (0,1). \end{cases}$$

1. Soit $u_k^n$ l'approximation en $(k\delta x, n\delta t)$ pour $\delta x = \frac{1}{K}$ et $\delta t = \frac{T}{N}$ fixés. Construire le schéma explicite de Richardson à l'aide de différences finies centrées du second ordre en temps et en espace.
2. Expliciter la matrice d'amplification de ce schéma.
3. Etudier la $L^2$-stabilité en se plaçant sur $\mathbb{R}$ et conclure.
4. Construire maintenant le schéma d'Euler explicite.
5. Calculer le coefficient d'amplification.
6. Etudier la $L^2$-stabilité en se plaçant sur $\mathbb{R}$.
7. Calculer l'ordre global en temps de ce schéma.
8. Evaluer le terme de diffusion numérique du schéma.

- **EXERCICE 3**

Soient $T > 0$ et $c < 0$, on considère sur $\mathbb{R}$ le problème d'évolution

$$(\mathcal{T}) \quad \begin{cases} \partial_t u + c\, \partial_x u = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Construire le schéma explicite décentré d'ordre 1 en temps et en espace en justifiant les choix effectués.
2. Calculer le coefficient d'amplification de ce schéma.
3. Etudier la $L^2$-stabilité du schéma.
4. Montrer que l'on peut retouver la même condition de stabilité par un argument géométrique.
5. Déterminer l'ordre global en temps de ce schéma.
6. Evaluer le terme de diffusion numérique du schéma.