université de BORDEAUX

ANNÉE : 2014/2015
SESSION DE DÉCEMBRE 2014

Master Modélisation, Ingénierie Mathématique, Statistique et Economique

$1^{ère}$ année

UE K0MS7101
Approximation des équations aux dérivées partielles 1
Charles-Henri Bruneau

(Durée : 3 heures)
Aucun matériel électronique n'est autorisé
Aucun document n'est autorisé

- **EXERCICE 1**

Soient l'ouvert $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ et $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, on veut résoudre le problème aux limites de Dirichlet

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

On construit sur le domaine Ω un maillage cartésien uniforme de pas $h = 1/N$ où N est le nombre de segments par direction. On décide de discrétiser $(\mathcal{P})$ par une méthode de différences finies centrées d'ordre élevé avec inconnues aux sommets du maillage.

1. Soit $M = (x, y) = (ih, jh)$ un sommet à l'intérieur du maillage, écrire une approximation centrée à l'ordre 4 des dérivées partielles secondes de u en ce point en utilisant deux points de part et d'autre de M.
2. Ecrire alors l'équation générique du schéma aux différences finies pour résoudre $(\mathcal{P})$ au point M (on pourra noter $u_{ij} = u(x, y)$.
3. Pour une numérotation des sommets de gauche à droite et de bas en haut, le point M est repéré de façon globale par $k = j(N-1) + i$. Donner la taille de la matrice et décrire son profil en tenant compte de la condition de Dirichlet.
4. Montrer que la matrice est inversible.
5. Proposer une méthode adéquate pour résoudre le système linéaire.

.../...

- **EXERCICE 2**

Soient $T > 0$ et $c < 0$, on considère sur $\mathbb{R}$ le problème d'évolution

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} \partial_t u + c\,\partial_x u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Construire le schéma explicite décentré d'ordre 1 en temps et en espace en justifiant les choix effectués.
2. Calculer le coefficient d'amplification de ce schéma.
3. Etudier la L^2-stabilité du schéma.
4. Montrer que l'on peut retouver la même condition de stabilité par un argument géométrique. Quel nombre de CFL faut-il utiliser et pourquoi ?
5. Déterminer l'ordre global en temps de ce schéma.
6. En comparant ce schéma au schéma de Richardson centré en espace, expliciter le terme de diffusion numérique du schéma décentré.
7. Montrer enfin qu'en utilisant l'équation, on peut construire le schéma de Lax-Wendroff qui est du second ordre en temps. On comparera le terme de diffusion numérique correspondant à celui du schéma décentré.
8. On décide maintenant de considérer l'équation de transport-diffusion en rajoutant le terme $-\partial_{xx} u$ à l'équation ci-dessus. Que proposez-vous pour discrétiser ce terme ? Justifier la réponse en expliquant l'impact que cela a sur la précision, la stabilité et la résolution.