Année : 2015/2016
Session de décembre 2015

# Master Modélisation, Ingénierie Mathématique, Statistique et Economique

$1^{ère}$ année

## UE K0MS7101
## Approximation des équations aux dérivées partielles 1
## Charles-Henri Bruneau

(Durée : 3 heures)
Aucun matériel électronique n'est autorisé
Aucun document n'est autorisé

- **EXERCICE 1**

Soient $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $T > 0$, $f \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T])$ et $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ ; on considère le problème d'évolution pour $u(x,t)$ $(x = (x_1, x_2))$ définie sur $\Omega \times (0,T)$ :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases}$$

1. On décide dans un premier temps d'utiliser une méthode de semi-discrétisation en temps. Soit $\delta t$ le pas de temps, écrire le problème stationnaire $(\mathcal{S}_n)$ à résoudre au temps $t = n\delta t$ en utilisant un schéma d'Euler en temps.
2. On utilise ensuite un schéma aux différences finies centré d'ordre 2 en espace pour résoudre $(\mathcal{S}_n)$. Justifier le choix du schéma et écrire l'équation générique en un sommet quelconque intérieur au domaine $\Omega$ sur lequel est défini un maillage cartésien uniforme de pas $\delta x_1 = \delta x_2 = h = 1/N$.
3. Décrire le système à résoudre en précisant les propriétés de la matrice et son inversibilité. Proposer une méthode de résolution dont on donnera l'algorithme.
4. Mettre en place une méthode aux volumes finis "vertex-centered" avec inconnues aux sommets pour résoudre $(\mathcal{S}_n)$ qui conduise à la résolution du même système linéaire (on précisera comment satisfaire les règles fondamentales, la définition des volumes de contrôle et tous les choix opérés).
5. On décide maintenant de faire une discrétisation globale par différences finies en utilisant les mêmes pas $\delta t$ et $\delta x_1 = \delta x_2$ que ci-dessus. Soit $u_{k,l}^n$ l'approximation en $(k\delta x_1, l\delta x_2, n\delta t)$, construire le schéma d'Euler inverse.

.../...

6. Déterminer l'ordre de consistance.
7. En se plaçant sur $\mathbb{R}^2$ et en posant $f = 0$, appliquer la transformée de Fourier au schéma et calculer le coefficient d'amplification.
8. Etudier la $L^2$-stabilité.
9. Déterminer l'ordre global en temps de ce schéma.
10. Comparer cette méthode aux deux autres méthodes étudiées ci-dessus.

- **EXERCICE 2**

On considère sur $\mathbb{R}$ le problème d'évolution :

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(x,t) - c^2\partial_{xx}u(x,t) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \mathbb{R} \\ \partial_t u(x,0) = u_1(x) \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. A partir d'un produit scalaire de l'équation avec $\partial_t u$, montrer que l'énergie totale est conservée.
2. Construire un schéma consistant d'ordre 2 en temps et en espace en justifiant les choix effectués pour un problème de propagation d'ondes.
3. Expliciter la matrice d'amplification de ce schéma.
4. Etudier la $L^2$-stabilité du schéma.
5. En multipliant l'équation du schéma par l'équivalent discret de $\partial_t u$, montrer que l'énergie discrète est conservée.