Examen 2015

Exercice 1

1) $$\frac{u^{n+1}(x,y)}{dt} - \Delta u^{n+1}(x,y) = \frac{u^{n}(x,y)}{dt} + f(t^n,x,y)$$

2) Schéma aux différences finies centré d'ordre 2 :
on l'obtient en faisant le développement de Taylor.

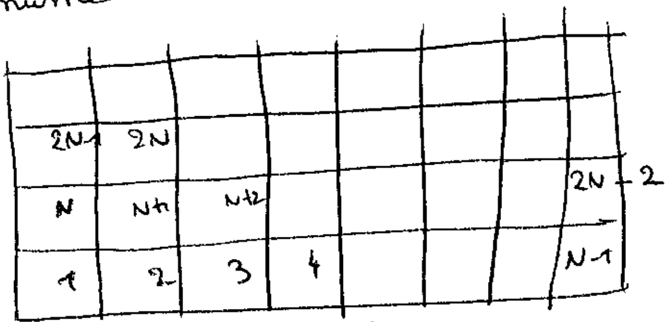
Pour un sommet quelconque intérieur au domaine Ω :

$$\frac{u^{n+1}_{ij}}{dt} + \frac{2u^{n+1}_{ij} - u^{n+1}_{i+1j} - u^{n+1}_{i-1j}}{\delta x_1^2} + \frac{2u^{n+1}_{ij} - u^{n+1}_{ij+1} - u^{n+1}_{ij-1}}{\delta x_2^2}$$

$$= \frac{u^{n}_{ij}}{dt} + f(t^n, x_i, y_j)$$

3) $AU = F$

On numérote de gauche à droite et de bas en haut



$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ \hline U_N \\ \vdots \\ U_{2N-2} \\ \hline U_{2N-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1N-1} \\ \hline u_{21} \\ \vdots \\ u_{2N-1} \\ \hline u_{31} \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ \vdots \\ f_{1N-1} \\ \hline f_{21} \\ \vdots \\ f_{2N-1} \\ \hline f_{31} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

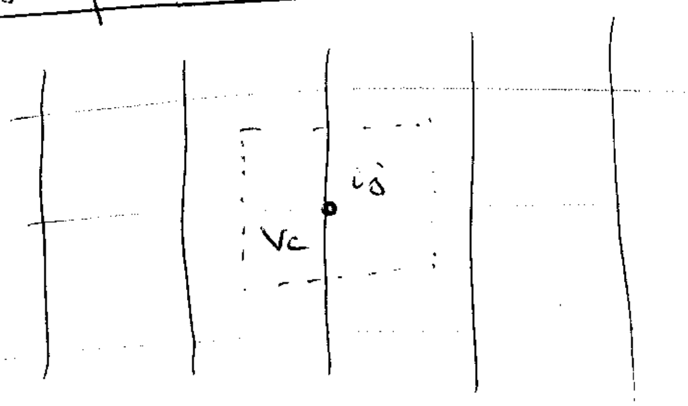
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{dt} + \frac{2}{dx_1^2} + \frac{2}{dx_2^2} & -\frac{1}{dx_1^2} & & 0 \\ -\frac{1}{dx_1^2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{dx_1^2} \\ 0 & & -\frac{1}{dx_1^2} & \frac{1}{dt} + \frac{2}{dx_1^2} + \frac{2}{dx_2^2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{dx_2^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\frac{1}{dx_2^2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A & D & & 0 \\ D & A & D & \\ & D & \ddots & D \\ 0 & & D & A \end{pmatrix}$$

Matrice tridiagonale par blocs de taille $(n-1)^2 \times (n-1)^2$
inversible car diag fortement dominante + irréductible.
Résolution : Cholesky.

4) Volumes finis vertex-centered :



V_c : volume de contrôle

$$\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\left(\frac{u^{n+1}}{dt} - \Delta u^{n+1}\right)dx\,dy = \iint\left[\frac{u^n}{dt} + f(t^n,x,y)\right]dx\,dy$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1}}{dt}dx\,dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}dx\,dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial y^2}dx\,dy$$

$$= dx\,dy\left[\frac{u_{ij}^n}{dt} + f_{ij}\right]$$

$$= -\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\left[\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}dy = -dy\underbrace{\left[\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}}_{\text{on approxime la dérivée avec des DF}} = -dy\left[\frac{u_{i+1j}^{n+1}-u_{ij}^{n+1}}{dx} - \frac{u_{ij}^{n+1}-u_{i-1j}^{n+1}}{dx}\right]$$

On obtient donc :

$$\frac{u_{ij}^{n+1}}{dt}dx\,dy - dy\,\frac{u_{i+1j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i-1j}^{n+1}}{dx} - dx\,\frac{u_{ij+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1}}{dy}$$

$$= dx\,dy\left[\frac{u_{ij}^n}{dt} + f_{ij}\right]$$

Règles fondamentales : cf cours.

5) Euler inverse = Euler implicite.

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{dt} - \frac{-u_{i+1j}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1} - u_{ij+1}^{n+1} - u_{ij-1}^{n+1} + 4u_{ij}^{n+1}}{h^2} = f_{ij}$$

6) Ordre de consistance :

on applique la formule ci-dessus sur la solution exacte

+ développement limité (Taylor)

$$\frac{u(t^n+dt, x_i, y_j) - u(t^n, x_i, y_j)}{dt}$$

$dx = dy = h$

$$+ \frac{\begin{array}{c} 4\, u(t^n, x_i, y_j) - u(t^n, x_i + dx, y_j) - u(t^n, x_i - dx, y_j) \\ - u(t^n, x_i, y_j + dy) - u(t^n, x_i, y_j - dy) \end{array}}{dx^2} = f(\overset{t^n}{x_i}, y_j)$$

$\longrightarrow$ ordre 1 en temps et ordre 2 en espace.

7) <u>Transformée de Fourier.</u>

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n} + \frac{dt}{dx^2}\left[u_{i+1j}^{n+1} + u_{i-1j}^{n+1} + u_{ij+1}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1} - 4u_{ij}^{n+1}\right]$$

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^{n} + \frac{dt}{dx^2}\hat{u}^{n+1}\left[e^{i\xi_x h} + e^{-i\xi_x h} + e^{+i\xi_y h} + e^{-i\xi_y h} - 4\right]$$

$$\hat{u}^{n+1}\left[1 + \frac{dt}{dx^2}\left(-e^{i\xi_x h} - e^{-i\xi_x h} - e^{i\xi_y h} - e^{-i\xi_y h} + 4\right)\right] = \hat{u}^{n}$$

$$-2\cos(\xi_x h) - 2\cos(\xi_y h) + 4$$

$$= 4\sin^2\left(\frac{\xi_x h}{2}\right) + 4\sin^2\left(\frac{\xi_y h}{2}\right)$$

$$\hat{u}^{n+1}\left[1 + \frac{dt}{dx^2}\left(4\sin^2\left(\frac{\xi_x h}{2}\right) + 4\sin^2\left(\frac{\xi_y h}{2}\right)\right)\right] = \hat{u}^{n}$$

$$m(\xi) = \frac{1}{1 + \frac{4dt}{dx^2}\sin^2\left(\frac{\xi_x h}{2}\right) + \frac{4dt}{dx^2}\sin^2\left(\frac{\xi_y h}{2}\right)}$$

8) $|m(\xi)| \leq 1 \quad \forall \xi_x, \xi_y$

donc la méthode est inconditionnellement stable.

9) Ordre global:

$$m_{ex}(\xi, dt) = e^{-(\xi_x^2 + \xi_y^2)dt}$$

L'ordre global en temps est obtenu en calculant :

$$\frac{m_{ex}(T, dt) - m(T)}{dt}$$

10) La méthode est équivalente aux 2 précédentes

Exercice 2

1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \partial_t u \left(\partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u \right) dx$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{tt} u \, \partial_t u \, dx}_{} - c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{xx} u \, \partial_t u \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t (\partial_t u)^2 \, dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{xx} u \, \partial_t u \, dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \partial_{xt} u \, dx + \underbrace{\Big[\partial_x u \, \partial_t u \Big]_{-\infty}^{+\infty}}_{= 0}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \partial_t (\partial_x u)^2 dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_t u)^2 \, dx + \frac{c^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x u)^2 \, dx \right] = \frac{d}{dt} \left(E(t) \right) = c.$$

2) Comme les infos viennent des 2 côtés, il faut prendre l'information des 2 côtés : schéma centré classique.

$$\frac{u_k^{n+1} - 2 u_k^n + u_k^{n-1}}{dt^2} - c^2 \, \frac{u_{k+1}^n - 2 u_k^n + u_{k-1}^n}{dx^2} = 0.$$

3) $$\hat{U}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} \hat{u}^{n+1} \\ \hat{u}^{n} \end{pmatrix}$$

$$u_k^{n+1} = 2u_k^n - u_k^{n-1} - c^2 \frac{dt^2}{dx^2}\left[u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n \right]$$

$$\hat{u}^{n+1} = 2\hat{u}^n - \hat{u}^{n-1} - c^2 \frac{dt^2}{dx^2}\Big[\underbrace{e^{i\xi dx} - 2 + e^{-i\xi dx}}_{2\cos(\xi dx) - 2 = -4\sin^2\left(\frac{\xi dx}{2}\right)} \Big] \hat{u}^n$$

$$\hat{U}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 2 - 4\frac{c^2 dt^2}{dx^2}\sin^2\left(\frac{\xi dx}{2}\right) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{U}^{n-1/2}$$

4) On cherche les valeurs propres de la matrice :

$$\left(2 - 4c^2\frac{dt^2}{dx^2}\sin^2\left(\frac{\xi dx}{2}\right) - \lambda \right) - \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \underbrace{\left(2 - 4c^2\frac{dt^2}{dx^2}\sin^2\left(\frac{\xi dx}{2}\right) \right)}_{m(\xi)} \lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = m(\xi)^2 - 4$$

Si $\frac{c\,dt}{dx} \leq 1$ $\Rightarrow$ les valeurs propres sont complexes ou doubles et on montre qu'elles sont ≤ 1 en module
$\Rightarrow$ stable.

Si $\frac{c\,dt}{dx} > 0$ $\Rightarrow$ valeurs propres réelles, distinctes
$\lambda_1 + \lambda_2 < -2$ $\Rightarrow$ instable