Introduction à l'analyse numérique
Année : 2018-2019
Formation : L2 Mathématiques

TD1 : Méthodes de recherche de zéros de fonctions et résolution numérique d'EDOs

1 Méthode de Newton

On cherche un zéro de $f(x) = x^2 - 2$ en prenant pour valeur initiale de la suite de Newton $x_0 = 1$.

1. Donner l'expression de x_{n+1} le $(n+1)$-ième élément de la suite de Newton en fonction de x_n.

2. Montrer par récurrence que $x_n \geq 1$ puis que $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|^2$.

3. Déduisez-en que $|x_n - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

4. Combien de décimales exactes obtient-on avec x_5 ? Avec x_{10} ?

2 Variante de la méthode de Newton

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\bar{x} \in I = [x_0 - c, x_0 + c]$,
(ii) $|f(x_0)| \leq \dfrac{c}{2\lambda}$,
(iii) $|f'(x) - f'(y)| \leq \dfrac{1}{2\lambda}$, $\forall (x, y) \in I^2$,
(iv) $|f'(x)| \geq \dfrac{1}{\lambda}$, $\forall x \in I$.

On définit la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$x^{(0)} = x_0, \tag{1}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(y)} \tag{2}$$

avec $y \in I$ choisi arbitrairement.

1. Montrer par récurrence que la suite ainsi définie satisfait $x^{(k)} \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (On pourra remarquer que $x^{(k+1)} - x_0 = x^{(k)} - x_0 - \frac{f(x^{(k)}) - f(x_0)}{f'(y)} - \frac{f(x_0)}{f'(y)}$

2. Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie $|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \dfrac{c}{2^n}$, et qu'elle converge vers $\bar{x}$.

3 Intégration numérique : méthode d'Euler explicite

On considère les trois équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} x'(t) &= a \\ x'(t) &= a\,t \\ x'(t) &= a\,x(t) \end{aligned}$$

avec a un nombre réel, et la condition initiale $x(0) = 1$.

1. Quelles sont les solutions exactes de ces équations ?
2. Pour chacune d'elles, calculer une approximation de la solution au temps $t = 0.3$, en utilisant le pas de temps $\Delta t = 0.1$, avec la méthode d'Euler explicite et la méthode d'Euler implicite.

4 Stabilité de la méthode d'Euler explicite

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = \lambda\, y(t)$$

avec la condition initiale $y(0) = y_0$. On note y_k la suite calculée avec la méthode d'Euler explicite, approximant la solution exacte $y(t_k)$, avec $t_k = k\,dt$, k un entier positif et dt un réel positif (petit).

1. En utilisant la définition de la méthode d'Euler explicite, exprimer y_k en fonction de la condition initiale y_0.
2. Sous quelle condition la méthode d'Euler est-elle stable ? (C'est-à-dire, sous quelle condition la solution numérique ne tend pas vers l'infini quand $k \to +\infty$?)
3. Que peut-on dire si on considère plutôt la méthode d'Euler implicite ?

5 Equation du pendule

On considère l'équation du pendule, avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\omega\, sin(x(t)),\ t > 0 \\ x(0) &= 0, \\ x'(0) &= 1. \end{aligned}$$

1. Avec un changement de variables, ré-ecrivez cette équation sous forme d'un système d'EDOs du premier ordre.
2. Calculez les 2 premières itérations de la méthode d'Euler explicite appliquée à ce système.

6 Réactions chimiques

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle $y'(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}y(t)$. Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la concentration est $y(0) = 5$, déterminer la concentration à $t = 2$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec un pas $h = 0.5$.

7 Problème raide

On considère l'équation

$$\begin{aligned} y'(t) &= -150y + 30, \text{ pour } t \in [0,1], \\ y(0) &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \dfrac{1}{5}$. Avec une donnée initiale $y(0) = \dfrac{1}{5} + \epsilon$, la solution exacte devient $y(t) = \dfrac{1}{5} + \epsilon e^{-150t}$.

1. Calculer les itérations obtenues par le schéma d'Euler explicite, en cherchant une relation de récurrence pour $y_n - \dfrac{1}{5}$.
2. En déduire une contrainte sur le pas de temps pour que les itérations du schéma d'Euler explicite tendent vers $\dfrac{1}{5}$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Mêmes questions pour la méthode d'Euler implicite.