Introduction à l'analyse numérique
Année : 2018-2019
Formation : L2 Mathématiques

TD2 : Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

La méthode de Jacobi est une méthode itérative de résolution d'un système d'équation linéaire $Ax = b$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. c'est-à-dire que l'on construit une suite de vecteurs

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & x^0 & \text{arbitraire} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & x^{n+1} = & \phi(x^n) \end{array} \right.$$

pour une certaine application ϕ bien choisie et dont le calcul est facile, rapide et numériquement stable. Lorsque la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ce qui n'arrive pas toujours), sa limite x vérifie alors $Ax = b$ et ses termes, pour un rang n assez grand, fournissent une approximation convenable de la solution du système.

Plus précisément, soit A une matrice carrée. On définit D comme la partie diagonale de la matrice A, $-E$ (attention au signe !) comme sa partie triangulaire inférieure, et $-F$ comme sa partie triangulaire supérieure. On définit alors la suite $(x^k)_{k\geq 0}$ par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & x^0 & \text{arbitraire} \\ \forall k \in \mathbb{N}, & x^{k+1} = & D^{-1}(b + (E+F)x^k) \end{array} \right.$$

1. Montrer que si la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite x vérifie $Ax = b$.

2. Application : on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculez les trois premières itérations de la méthode de Jacobi pour le système linéaire $Ax = b$, avec comme terme initial de la suite le vecteur x^0.

3. Montrer qu'avec la méthode de Jacobi on a :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^k\Big), \quad \forall\, 1 \leq i \leq n. \tag{1}$$

4. Soit la matrice carrée A_h de taille n, tridiagonale, correspondant à la discrétisation par différences finies de l'équation de la chaleur stationnaire en une dimension :

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

avec $h = 1/(n+1)$. Expliciter la formule (1) dans ce cas particulier, en utilisant uniquement les coefficients non-nuls de la matrice.

5. La matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale strictement dominante si ses coefficients vérifient :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

Montrer que si la matrice A est à diagonale strictement dominante alors elle est inversible.

On veut maintenant montrer que la méthode de Jacobi appliquée à une matrice à diagonale strictement dominante converge vers la solution du système linéaire pour toute valeur initiale x^0. Cette preuve comporte plusieurs étapes

6. Montrer que

$$x^{k+1} - x = D^{-1}(E+F)(x^k - x)$$

7. On note

$$K = \sup_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right)$$

Montrer que

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{k+1} - x_i| \leq K \max_{1\leq i\leq n} |x_i^k - x_i|$$

8. En déduire que $\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i^k - x_i| \to 0$ quand $k \to +\infty$.