

TP5 : Calcul de trajectoires de planètes

Le but de ce TP est de calculer numériquement les trajectoires de 5 planètes du système solaire : Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et Pluton. Il est tiré du polycopié d'*Analyse Numérique* d'Ernst Hairer.

On considère que les planètes ne sont soumises qu'aux forces gravitationnelles exercées par les autres planètes et par le soleil. La force gravitationnelle $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ exercée par un corps de masse m_2 situé en $\vec{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sur un corps de masse m_1 situé en $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G m_2 m_1 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3}$$

avec G la constante de gravitation universelle. La loi de Newton :

$$\sum F = m_i a$$

permet alors d'obtenir les équations du mouvement suivantes pour le corps i considéré

$$\vec{x}_i'' = -G \sum_{j=1, j \neq i}^6 m_j \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^3}$$

pour $i = 1$ à 6 , où :

- $i = 1$ correspond à Jupiter, de masse $m_1 = 0.000954786104043$,
- $i = 2$ à Saturne, avec $m_2 = 0.000285583733151$,
- $i = 3$ à Uranus, avec $m_3 = 0.0000437273164546$,
- $i = 4$ à Neptune, avec $m_4 = 0.0000517759138449$,
- $i = 5$ à Pluton, avec $m_5 = 1/(1.3 \cdot 10^8)$,
- $i = 6$ au Soleil, avec $m_6 = 1.00000597682$.

Les unités de masse sont relatives au soleil, lui-même de masse différente de 1 après correction pour tenir compte de la masse des planètes proches. Les unités de temps sont en jours terrestres. Le mouvement des planètes est étudié dans le référentiel lié au soleil, qui a donc la position initiale $\vec{x}_6 = 0$. On imposera que le soleil reste fixe, c'est-à-dire que

$$\vec{x}_6'' = 0$$

La constante de gravitation universelle est $G = 2.95912208286 \cdot 10^{-4}$. Les positions initiales des 5 planètes, données en unités astronomiques (1 A.U. = 149597870 km), ainsi que leurs vitesses initiales, sont données dans le tableau ci-après.

Le système d'équations donné par :

$$\begin{cases} \vec{x}_i'' = -G \sum_{j=1, j \neq i}^6 m_j \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^3} \\ \vec{x}_6'' = 0 \end{cases}$$

	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
x	-3.5023653	9.0755314	8.3101420	11.4707666	-15.5387357
y	-3.8169847	-3.0458353	-16.2901086	-25.7294829	-25.2225594
z	-1.5507963	-1.6483708	-7.2521278	-10.816945	-3.1902382
u	0.00565429	0.00168318	0.00354178	0.00288930	0.00276725
v	-0.00412490	0.00483525	0.00055029	0.00039677	-0.00136504
w	-0.00190589	0.00192462	0.00055029	0.00039677	-0.00136504

FIGURE 1 – Positions et vitesses initiales des planètes

est un système d'ordre 2 car on a une dérivée seconde. On peut le mettre sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre, en introduisant la variable intermédiaire $\vec{v}_i = \vec{x}'_i$ (qui est simplement la vitesse) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}'_i = \vec{v}_i \\ \vec{x}''_i = -G \sum_{j=1, j \neq i}^6 m_j \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^3} \\ \vec{x}'_6 = \vec{v}_6 \\ \vec{x}''_6 = 0 \end{array} \right.$$

On ré-écrit alors ce système sous une forme vectorielle en introduisant un vecteur X qui regroupe toutes les variables nécessaires à la description du mouvement, c'est-à-dire dans notre cas les positions et les vitesses des 6 corps (on a donc 36 composantes) :

$$X' = f(X)$$

avec le vecteur $f(X)$ qui regroupe la partie droite de l'équation et X un vecteur colonne de longueur 36, les 3 premières valeurs correspondant à la position du corps 1, les 3 suivantes à la position du corps 2, etc.

1. Ecrivez une fonction **function F = fonct(X)** qui calcule la valeur de chacune des composantes du vecteur $f(X)$, à partir du vecteur X . Pour s'assurer que votre fonction est implémentée correctement, vérifiez que :

$$f(X_0) \approx (0.00565429, -0.00412490, -0.00190589, 0.00000656, 0.00000714, 0.00000290, \\ 0.00168318, 0.00483525, 0.00192462, -0.00000293, 0.00000098, 0.00000053, \\ 0.00354178, 0.00137102, 0.00055029, -0.00000032, 0.00000063, 0.00000028, \\ 0.00288930, 0.00114527, 0.00039677, -0.00000012, 0.00000028, 0.00000012, \\ 0.00276725, -0.00170702, -0.00136504, 0.00000017, 0.00000028, 0.00000004, \\ 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000)$$

où X_0 est le vecteur des positions et vitesses des planètes à l'instant initial, récapitulés dans le tableau précédent.

2. Ecrivez une fonction **function X_{new} = Eulerex(X,dt)** qui pour X quelconque à un instant t , renvoie X_{new} l'itéré à l'instant $t + dt$ par la méthode d'Euler explicite.
3. Ecrivez ensuite une série d'instructions pour calculer numériquement la position de Jupiter de $t = 0$ à $t_{max} = 100000$. On prendra dans un premier temps $dt = 100$. Attention : pour des raisons de place mémoire, le vecteur X est initialisé avec les données initiales, et à chaque pas de temps, on écrase les anciennes valeurs pour les remplacer par les nouvelles. On enregistre uniquement la position de Jupiter au cours du temps afin de pouvoir l'afficher ensuite.
4. Avec la commande **param3d** (voir l'aide de Scilab), afficher la trajectoire de Jupiter au cours du temps.
5. La trajectoire est-elle périodique ? Diminuez le pas de temps et comparez.
6. Enregistrez les positions d'une autre planète et visualisez sa trajectoire.

7. Regardez dans l'aide de Scilab la syntaxe de la fonction `ode` et utilisez-la pour calculer des trajectoires de planètes avec d'autres méthodes d'intégration numérique.