Introduction à l'analyse numérique
Année : 2018-2019
Formation : L2 Mathématiques

TP 6 : Méthodes d'Euler et système de Lotka-Volterra

1 Retour sur les méthodes d'Euler explicite et implicite

Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation différentielle suivante par les différentes méthodes d'Euler

$$(E) : y'(t) = -\frac{1}{1+t^2}y(t), \quad t \in [0, t_{max}], \quad y(0) = y_0.$$

Cette équation décrit l'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps.

1. Déterminez la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, vérifiant $y'(t) = f(t, y(t))$ et définissez-la en Scilab.

On rappelle que les méthodes numériques de résolution d'équation différentielle consistent à découper l'intervalle $[0, t_{max}]$ sur lequel on souhaite résoudre l'équation en considérant une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = t_{max}$$

On cherche ensuite à déterminer de manière approchée la valeur de $y(t_n) \simeq y_n$ avec y_n définie par la formule de récurrence associée à la méthode choisie.

2. Rappelez vous des formules de récurrence d'Euler explicite et implicite. Quelle est la différence entre ces deux schémas de discrétisation ?

Ici on considère que les t_n sont réparties de manière uniforme et donc que $dt = t_{n+1} - t_n$ est constant.

3. Définissez la fonction `function R=EulerExp(f,y0,t0,tmax,dt)` qui prend en paramètre la fonction f d'une equation $y'(t) = f(t, y(t))$, la condition initiale y_0, deux réels $t_0 < t_{max}$ et un pas de temps dt et qui renvoie la liste R=[T ;Y] avec T la liste des temps successifs t_n et Y la liste des y_n $(0 \leq n \leq \frac{t_{max}-t_0}{dt})$.

4. Calculez une solution numérique de l'équation (E) avec la méthode d'Euler explicite (on prendra $y_0 = 5$, $t_{max} = 10$ et $dt = 0.1$ dans un premier temps). Affichez cette solution sur un graphique.

On résout maintenant cette équation différentielle par la méthode d'Euler implicite.

5. Donnez, pour l'équation (E), l'expression "explicite" de y_{n+1} en fonction de y_n dans la méthode d'Euler implicite.

6. Définissez la fonction `function R=EulerImp(y0,t0,tmax,dt)` qui prend en paramètre la condition initiale y_0, deux réels $t_0 < t_{max}$ et un pas de temps dt et qui renvoie la liste R=[T ;Y] avec T la liste des temps successifs t_n et Y la liste des y_n $(0 \leq n \leq \frac{t_{max}-t_0}{dt})$ obtenue par la méthode d'Euler implicite pour l'équation (E).

Il est à noter que pour certaine équation (par exemple $y'(t) = y(t) - e^{y(t)}$) il n'est pas possible de calculer de manière explicite la suite des y_n (d'où le nom de la méthode). On détermine alors y_{n+1} en cherchant le zéro d'une fonction. Cette exemple est détaillé dans la troisième partie du TP noté du groupe A3.

On peut facilement vérifier que la solution exacte de ce problème est :

$$y_{exact}(t) = y_0 \ e^{-\arctan(t)}.$$

7. Affichez sur un graphique l'erreur (c'est-à-dire la fonction $t \mapsto |y_{exact}(t) - y_{num}(t)|$) entre la solution numérique et la solution exacte pour chaque méthode.
Quelle méthode est la plus efficace pour cette équation ?

2 Modèle Proie-Prédateur de Lotka-Volterra

En mathématiques, les équations de Lotka-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de "modèle proie-prédateur", sont un couple d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent. Elles ont été proposées indépendamment par Alfred James Lotka en 1925 et Vito Volterra en 1926. En 1926, Volterra proposa un modèle simple de système *proie–prédateur* (par exemple le couple requin–sardine ou autre) afin d'expliquer les oscillations dans les campagnes de pêche dans l'Adriatique. Il s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & \underbrace{ay_1(t)}_{croissance} - \underbrace{by_1(t)y_2(t)}_{proies\ consommees} \\ y_2'(t) & = & \underbrace{qy_1(t)y_2(t)}_{croissance} - \underbrace{py_2(t)}_{mortalite\ predateurs} \end{array} \right.$$

où t représente le temps, $y_1(t)$ et $y_2(t)$ comptent respectivement le nombre de proies et de prédateurs au cours du temps et a, b, p et q sont des paramètres positifs.

La première équation se comprend comme suit : en l'absence de prédateurs, les proies se reproduisent naturellement avec un taux d'accroissement a, mais elles sont mangées proportionellement à la présence de prédateurs (terme $-by_2(t)$). De même, en l'absence de proie, les prédateurs meurent avec un taux p, mais leur population s'accroît proportionnellement à la présence de proie (terme $qy_2(t)$).

Exercice 1 :

En notation vectorielle ce système s'écrit

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0 \tag{1}$$

avec $y = (y_1, y_2)^T$ (où A^T désigne la transposée de A) et $f = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t, x_1, x_2) = (ax_1 - bx_1x_2 \ , \ qx_1x_2 - px_2)^T.$$

1. Définir la fonction `function y=f(t,x)` donnant le "champs des vecteurs" $t \longrightarrow (y_1'(t), y_2'(t))^T$, avec ($a = 3$, $b = 1$, $p = 2$ et $q = 1$). A l'aide de l'instruction `fchamp` tracer ces vecteurs sur $[0, 4] \times [0, 6]$ par pas de $0, 5$.

2. Écrivez une fonction `function yy=eulE(y0,dt,tf)` qui prend en paramètre la condition initiale y_0 (c'est un vecteurs à 2 éléments), un pas de temps dt et un temps final t_f et qui renvoie la suite des N valeurs successives y^n de la solution approchée de (1) par la méthode d'Euler explicite.

3. Tracez dans le plan (y_1, y_2) les solutions du système à l'aide de la méthode d'Euler explicite pour $dt = 0, 05$ (et dt plus petit), $t_f = 20$ et avec l'état initial $y_0 = (1, 2)^T$, $a = 3$, $b = 1$, $p = 2$ et $q = 1$.

4. On veut maintenant résoudre ce système par la méthode RK2. Sur le même principe que la question 2, écrivez une fonction `function yy=RK2(y0,dt,tf)` qui résout le système. Tracez dans le plan (y_1, y_2) les solutions du système obtenues par la méthode RK2 pour $dt = 0, 05$ (et dt plus petit) avec l'état initial $y_0 = (1, 2)^T$, $a = 3$, $b = 1$, $p = 2$ et $q = 1$.

5. Quelle méthode donne des solutions périodiques ? Cette méthode donne des résultats plus proche de la solution exacte.

Exercice 2 : Proie Prédateur avec compétition intraspecifique

Dans cet exercice, on perturbe le modèle précédent en introduisant, pour les deux espèces une compétition entre individus d'une même famille qui se traduit par une mortalité proportionnelle au nombre d'individus de cette famille présents à l'instant t et de coefficient epsilon.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & ay_1(t) - y_1(t)y_2(t) - \underbrace{\epsilon y_1(t)^2}_{competition\ entre\ proies} \\ y_2'(t) & = & qy_1(t)y_2(t) - py_2(t) - \underbrace{\epsilon y_2(t)^2}_{competition\ entre\ predateurs} \end{array}\right.$$

Pour le jeu de test on choisira a=3 ;b=1 ;p=2 ;q=1 ;eps=0.01 ;

6. Résoudre ce système par la méthode RK2 jusqu'au temps $t_f = 20$ avec un pas $dt = 0.05$ et avec l'état initial $y_0 = (1,2)^T$. Affichez les résultats. Qu'observe-t-on ?

Exercice 3 :Introduction d' un super-prédateur

On peut également rajouter une troisième espèce, un "super-prédateur" et étudier le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_1(t)\ (a_1 - b_1 y_2(t)) \\ y_2'(t) & = & y_2(t)\ (-a_2 + b_2 y_1(t) - c_1 \dfrac{y_2(t)y_3(t)}{d^2 + y_2(t)^2}) \\ y_3'(t) & = & y_3(t)\ (-a_3 + c_2 \dfrac{y_2(t)^2}{d^2 + y_2(t)^2}) \end{array}\right.$$

avec $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d) = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.6, 0.75, 10)$ et pour trois valeurs particulière de a_3 :

$$a_3 = 0.001 \quad , \quad a_3 = 0.05 \quad \text{et} \quad a_3 = \frac{a_1^2 c_2}{a_1^2 + b_1 d^2}.$$