Introduction à l'analyse numérique
Année : 2017-2018
Formation : L2 Mathématiques

TP5 : Résolution numérique d'Equations Différentielles Ordinaires

1 Chute d'un corps

La vitesse d'un corps en chute libre sous la seule action de la pesanteur dans l'atmosphère est donnée par le principe fondamental de la dynamique. Elle est solution de l'équation différentielle suivante :

$$m\frac{dV}{dt} = -kV^2 + mg, \tag{1}$$

avec
- V(t) en m/s : la vitesse du corps au temps t,
- m = 70 kg : masse du corps,
- g = 9.81 N/kg : accélération de la pesanteur,
- k=0.27kg/m : résistance de l'air,
- $0 \leq t \leq 20s$: intervalle de temps sur lequel on cherche la solution,
- V(0) = 0 : la condition initiale.

1. Écrivez une fonction `chuteEulerEx` calculant les valeurs approchées, selon la méthode d'Euler explicite, de la solution ayant pour condition initiale $V(0) = 0$ sur l'intervalle de temps considéré pour un pas $h = 2s$. Tracez le graphe de la solution approchée.
2. Idem, pour la méthode d'Euler implicite. Dans ce but, pour calculer le zéro d'une fonction bien choisie, vous utiliserez la fonction Scilab `fsolve`.
3. Idem, pour la méthode du point milieu. Dans ce but, pour calculer le zéro d'une fonction bien choisie, vous utiliserez la fonction Scilab `fsolve`.
4. Vérifiez que la solution exacte de cette équation est de la forme
$$V(t) = V_0 \tanh(\frac{t}{T})$$
avec V_0 et T à déterminer.
5. Tracez un graphe comparant les valeurs approchées obtenues avec les différentes méthodes aux valeurs de la solution analytique.
6. Ecrivez une fonction Scilab qui trace les erreurs correspondant aux différentes méthodes numériques en fonction du pas h, avec $h = 2s, 1s, \frac{1}{2}s, \cdots, 2^{-4}s$,
7. Commentez les courbes d'erreurs ainsi obtenues.

2 Modélisation mathématiques d'une invasion de zombies

Le but de cet exercice est d'étudier un modèle épidémiologique, c'est-à-dire de propagation d'une épidémie, basé sur un système d'équations différentielles ordinaires.

On considère que la population globale est constitue de trois catégories :
- Les individus susceptibles d'être infectés, donc vivants et non-zombies (S)
- Les individus actuellement zombies (Z)
- Les individus décédés, que ce soit ou non relié à une attaque de zombies (D).

Pour écrire le modèle, on fait les hypothèses suivantes :
- Des individus de la catégorie S deviennent des zombies s'ils perdent le combat contre un zombie. A contrario, s'ils gagnent le combat, cela peut mener à l'élimination du zombie. On note α le taux de zombies éliminés par des individus S , et β le taux d'individus S qui sont transformés en zombies suite à un combat perdu.
- Des individus récemment décédés peuvent également revenir à la vie sous forme de zombie : on note ζ leur taux de génération.

Enfin, le taux de mortalité naturelle est noté δ. Sous ces hypothèses, le modèle de propagation de l'épidémie de zombies est le suivant :

$$\begin{aligned}
S' &= -\beta\, S\, Z,\\
Z' &= \beta\, S\, Z + \zeta\, D - \alpha\, S\, Z,\\
D' &= \delta\, S + \alpha\, S\, Z - \zeta\, D.
\end{aligned}$$

1. Écrivez une fonction `ZombieEulerEx` calculant l'évolution avec la méthode d'Euler explicite des différentes populations, en fonction des paramètres α, β, δ, ζ, des valeurs initiales des trois catégories de population, du temps final choisi T_f et du pas de temps dt.
2. Calculez la solution approchée au temps final $Tf = 30$ pour une population initialement constituée de 500 individus dans la catégorie S, et aucun dans les deux autres catégories, avec $\alpha = 0.005$, $\beta = 0.0095$, $\zeta = 0.0001$ et $\delta = 0.0001$. Que constatez-vous ?
3. On suppose maintenant qu'un médicament existe, qui permet de guérir les zombies, et donc les faire repasser dans la catégorie S. Le modèle devient alors :

$$\begin{aligned}
S' &= -\beta\, S\, Z + cZ,\\
Z' &= \beta\, S\, Z + \zeta\, D - \alpha\, S\, Z - cZ,\\
D' &= \delta\, S + \alpha\, S\, Z - \zeta\, D.
\end{aligned}$$

   Calculez l'évolution de ce nouveau modèle, avec les mêmes paramètres que pour la question précédente, et différentes valeurs du paramètre c. Que constatez-vous ?