Introduction à l'analyse numérique
Année : 2017-2018
Formation : L2 Mathématiques

TP8 : Recherche des zéros de fonctions

1 Dichotomie et méthode de Newton

Soit f une fonction numérique dont on recherche un zéro ζ. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des approximations de ζ obtenue à partir de termes initiaux en utilisant la méthode de dichotomie ou la méthode de Newton.

Rappel : Des fonctions peuvent être créées en Scilab de deux manières, soit avec la commande `deff`, soit dans un fichier indépendant.

1. Ecrivez une fonction `function zero = dichoto(f, a, b, nbetap)` qui renvoie la suite des $nbetap+1$ premières approximations du zéro de f localisé entre a et b calculé par une méthode de dichotomie.
2. Ecrivez une fonction `function zero = newton(f, ff, x0, nbetap)` qui renvoie la suite des $nbetap+1$ premières approximations du zéro de f calculé à l'aide de la dérivée *ff* de f à partir de x_0 par la méthode de Newton.

2 Ordre de convergence

On définit les fonctions

$$f_1(x) = 3\cos(x) - 2\ln(x+1) - 1,$$
$$f_2 = 2x - 1, \quad f_3(x) = (2x-1)^3, f_4(x) = (2x-1)^5$$

1. Après avoir calculé les dérivées à la main, testez les fonctions écrites lors de l'exercice précédent sur les fonctions f_i, $1 \leq i \leq 4$ ainsi définies.
2. Comparez sur un même graphique (n en fonction de k) le nombre n d'itérations nécessaires à chaque méthode pour obtenir le zéro des fonctions suivantes entre $a = 0$ et $b = 1$ avec une précision de 10^{-k} pour k entre 1 et 5.
3. Représentez graphiquement les premiers termes de la suite $\left(\frac{\ln(|\zeta - x_{n+1}|)}{\ln(|\zeta - x_n|)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où ζ représente la zéro de la fonction.
4. Qu'en déduisez-vous à propos de la convergence des deux méthodes ?

3 Fractale de Newton

La méthode de Newton s'applique aussi aux fonctions vectorielles de plusieurs variables $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. On peut donc en particulier l'utiliser pour des fonctions dans le plan complexe.

Dans cet exercice, on considère la fonction $f : z \mapsto z^3 - 1$. On rappelle que le polynôme $z^3 - 1$ possède trois racines dans le plan complexe : 1, j, j^2, avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Plus précisément, on souhaite colorier les points du domaine du plan complexe $\mathscr{D} = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{C}$ en fonction de la racine de f vers laquelle converge la méthode de Newton initialisée sur chacun de ces points. Pour avoir une idée du phénomène que l'on souhaite observer, vous pouvez consulter par exemple la page web `https://fr.wikipedia.org/wiki/Fractale_de_Newton`.

On considère donc la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$F(x, y) = \Big(Re\big((x + iy)^3 - 1\big), Im\big((x + iy)^3 - 1\big)\Big).$$

1. Calculez à la main la Jacobienne de F en (x, y) :

$$dF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2. Définissez deux fonctions qui à (x, y) associent respectivement la valeur de la fonction $F(x, y)$ et celle de sa Jacobienne $dF(x, y)$.

3. On divise $\mathscr{D}$ en petits carrés de longueur p (paramètre à choisir). Avec la commande `meshgrid`, construisez une matrice Z dont les coefficients représentent les affixes de ces carrés. Par exemple pour $p = 2$

$$Z = \begin{pmatrix} -2 + 2i & 2i & 2 + 2i \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 - 2i & -2i & 2 - 2i \end{pmatrix}$$

4. Ecrivez la fonction `Newt` qui effectue une étape dans la méthode de Newton. Cette fonction devra accepter des matrices en entrée.

5. Calculez Zn la matrice contenant les n-ième itérations de la méthode de Newton pour toutes les valeurs contenues dans Z.

6. Vérifiez que les parties imaginaires des racines de f sont distinctes.

7. Avec la commande Scilab `matplot` représentez graphiquement la partie imaginaire de Zn, pour différentes valeurs de n. On prendra soin d'éliminer les valeurs de Zn supérieures à 1 ou inférieures à -1 en utilisant la commande `max` et `min`.