ANNEE UNIVERSITAIRE 2016 / 2017

SESSION 1 D'AUTOMNE

Parcours : MA301
UE : 4TMQ301EX, Introduction à l'analyse numérique
Date : 03/01/2017 **Heure : 9h** **Durée :** 1h30
Epreuve de : Mme Weynans
Documents autorisés : Aucun
Nombre de pages : 2

La notation comprend 2 points sur 20 pour la qualité de la rédaction. En particulier les algorithmes doivent être présentés de la manière la plus claire possible.

Exercice 1 : Méthodes de recherche de zéros de fonctions

Soit une fonction réelle f définie sur un intervalle $[a, b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$. On cherche à calculer numériquement la valeur $x \in]a, b[$ telle que $f(x) = 0$.

1. Décrivez les algorithmes de Newton, de la sécante, et de la dichotomie.
2. Application: on prend $f(x) = x^2 - 2$, $a = 0$ et $b = 2$. On prend $x_0 = 2$. Calculer les trois premières itérations de la méthode de Newton et de la sécante.

Exercice 2 : Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel

1. Décrivez succinctement le principe de discrétisation numérique de l'équation de la chaleur stationnaire en une dimension.
2. Décrivez les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
3. Montrer que la méthode de Jacobi appliquée à une matrice à diagonale strictement dominante converge vers la solution du système linéaire pour toute valeur initiale x^0.
4. Application: on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculez les trois premières itérations de la méthode de Jacobi pour le système linéaire $Ax = b$, avec comme terme initial de la suite le vecteur x^0.

Exercice 3 : Interpolation de Lagrange

On considère les suites de points $x_0 = 3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, et $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 1$.

1. Calculez le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $0 \leq i \leq 3$. en utilisant la formule faisant intervenir les polynômes élémentaires de Lagrange.

2. Quel est le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les points $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, pour la fonction $g(x) = 14x^3 + 5x^2 + 2x + 1$?

3. Ecrivez et démontrez la formule d'Aitken.

Exercice 4 : Intégration numérique d'EDO's

On considère l'équation du pendule, avec les conditions initiales:

$$\begin{aligned} &x''(t) = -\omega\, sin(x(t)),\ t > 0 \\ &x(0) = 0, \\ &x'(0) = 1. \end{aligned}$$

1. Avec un changement de variables, ré-ecrivez cette équation sous forme d'un système d'EDOs du premier ordre.

2. Calculez les 2 premières itérations de la méthode d'Euler explicite appliquée à ce système.

3. Décrivez l'algorithme pour une méthode d'intégration numérique d'ordre 2, selon votre choix, appliquée à ce système.