

SESSION 1 D'AUTOMNE

Parcours : MA300

UE : MA3003EX, Calcul scientifique et symbolique

Date : 5 Janvier 2016

Heure : 11h - 12h30

Durée : 1h30

Epreuve de : Mme Weynans

Documents autorisés : Aucun

Nombre de pages : 3

La notation comprend 4 points sur 20 pour la qualité de la rédaction. En particulier les algorithmes doivent être présentés de la manière la plus claire possible, et les différentes étapes détaillées explicitement.

Exercice 1 : Méthodes de recherche de zéros de fonctions

Soit une fonction réelle f définie sur un intervalle $[a, b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$. On cherche à calculer numériquement la valeur $x \in]a, b[$ telle que $f(x) = 0$.

1. Décrivez les algorithmes de Newton, de la sécante, et de la dichotomie.
2. Quelles hypothèses doivent être vérifiées pour que ces algorithmes convergent?
3. Application: on prend $f(x) = (x - 1)(x - 2)$, $a = 0$ et $b = 1.5$. On prend $x_0 = 0$. Calculer les trois premières itérations de la méthode de Newton, et de la sécante.

Exercice 2 : Interpolation de Lagrange

On considère les suites de points $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, et $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 1$.

1. Construisez le tableau des différences divisées associé à ces points.
2. Déduisez-en le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $0 \leq i \leq 3$.
3. Calculez ce même polynôme en utilisant la formule faisant intervenir les polynômes élémentaires de Lagrange.

4. Quel est le polynôme d'interpolation de Lagrange P passant par les points $x_0 = -1$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, pour la fonction $g(x) = x^3 + x^2 + 1$.

Exercice 3 : Division euclidienne

Effectuez la division euclidienne de A par B , avec

1. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$, $B = X^3 + X + 2$,
2. $A = X^4 - X^3 + X - 2$, $B = X^2 - 2X + 4$.

Exercice 4 : Algorithme d'Euclide étendu

Déterminez le PGCD de $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $B = X^3 + X + 1$ en appliquant l'algorithme d'Euclide étendu.

Exercice 5 : Correction d'algorithme

Les quatre algorithmes présentés ci-dessous contiennent chacun une erreur de programmation, sauf le dernier qui en contient deux. Attention, ce ne sont pas des erreurs de syntaxe, mais des erreurs dans l'algorithme ou dans la mise en oeuvre de la méthode.

1. Indiquez quelles sont ces erreurs en justifiant pourquoi.
2. Ré-écrivez ces algorithmes en les corrigeant.

```
def Lagrange(Lx, Ly):
    X = R.0
    n = len(Lx)
    P = 0
    for k in range(0, n):
        for i in range(n):
            if i != k:
                Laux[k] = Laux[k]*(X-Lx[i])/(Lx[k]-Lx[i])
        P = P + Laux[k]*Ly[k]
    return P
```

```

# Spline
var('x')
f(x) = exp(-x**2)
n = 100
a = -7
b = 7
Lx = [0 for i in range(n+1)]
def spline(x) :
    for j in range(n+1) :
        Lx[j] = a + (b-a)*j/n
    if x < Lx[0] :
        return f(Lx[0])
    if x > Lx[n-1] :
        return f(Lx[n])
    if Lx[j] <= x <= Lx[j+1] :
        return (f(Lx[j]) + (x-Lx[j])*(f(Lx[j+1])-f(Lx[j]))/(Lx[j+1]-Lx[j])).n(digits=10)

```

```

//calcul de la fonction dont on evalue l'aire
..function y = fonc(x)
.....y = x^(2)
.....y = -x*(1-x)*(sin(200*x*(1-x)))^(2)
.....
endfunction

//Méthode des trapèzes
...calcul approché de l'integrale d'une fonction fonc définie sur [a,b]
...approximation linéaire de la fonction sur des sous-segments de taille dh
..function E = trapezes(n,a,b)
...
...E = 0.
...dh = (b-a)/n
...for i=1:n
.....x = a + (i-1)*dh
.....y = a + (i)*dh
.....E = E + dh*(fonc(x)+fonc(y))/3.
...end
endfunction

```

```

//calcul de la fonction dont on evalue l'aire
..function y = fonc(x)
.....y = x^(2)
.....y = -x*(1-x)*(sin(200*x*(1-x)))^(2)
.....
endfunction

//Méthode des rectangles
...calcul approché de l'integrale d'une fonction fonc définie sur [a,b]:
...approximation constante de la fonction sur des sous-segments de taille dh
..function E = rectangles(n,a,b)
...dh = (b-a)/n
...for i=1:n
.....x = a + (i-1)*dh
.....E = E + dh*fonc(a)
...end
endfunction

```