ANNEE UNIVERSITAIRE 2015 / 2016

SESSION 2 D'AUTOMNE-PRINTEMPS

Parcours : MA300
UE : MA3003EX, Calcul scientifique et symbolique
Date : **Heure :** **Durée :** 1h30
Epreuve de : Mme Weynans
Documents autorisés : Aucun
Nombre de pages : 3

La notation comprend 4 points sur 20 pour la qualité de la rédaction. En particulier les algorithmes doivent être présentés de la manière la plus claire possible, et les différentes étapes détaillées explicitement.

Exercice 1 : Méthodes de recherche de zéros de fonctions

Soit une fonction réelle f définie sur un intervalle $[a, b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$. On cherche à calculer numériquement la valeur $x \in]a, b[$ telle que $f(x) = 0$.

1. Décrivez les algorithmes de Newton, de la sécante, et de la dichotomie.
2. Quelles hypothèses doivent être vérifiées pour que ces algorithmes convergent?
3. Application: on prend $f(x) = x^2 - 2$, $a = 0$ et $b = 2$. On prend $x_0 = 2$. Calculer les trois premières itérations de la méthode de Newton, et de la sécante.

Exercice 2 : Interpolation de Lagrange

On considère les suites de points $x_0 = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, et $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 1$.

1. Construisez le tableau des différences divisées associé à ces points.
2. Déduisez-en le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $0 \leq i \leq 3$.
3. Calculez ce même polynôme en utilisant la formule faisant intervenir les polynômes élémentaires de Lagrange.

4. Quel est le polynôme d'interpolation de Lagrange P passant par les points $x_0 = -8$, , $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 20$, pour la fonction $g(x) = 3x^3 + 15x^2 + 4x + 1$.

Exercice 3 : Division euclidienne

1. Décrivez l'algorithme de la division euclidienne.
2. Effectuez la division euclidienne de A par B, avec $A = X^3 + 6X^2 - X - 30$, $B = X + 5$,

Exercice 4 : Algorithme d'Euclide étendu

Déterminez le PGCD de $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 - 1$ en appliquant l'algorithme d'Euclide étendu.

Exercice 5 : Correction d'algorithme
Les quatre algorithmes présentés ci-dessous contiennent chacun une erreur de programmation, sauf le dernier qui en contient deux. Attention, ce ne sont pas des erreur de syntaxe, mais des erreurs dans l'algorithme ou dans la mise en oeuvre de la méthode.

1. Indiquez quelles sont ces erreurs en justifiant pourquoi.
2. Ré-écrivez ces algorithmes en les corrigeant.

```
def Lagrange(Lx,Ly):
    X = R.0
    n = len(Lx)
    P = 0
    for k in range(0,n):
        for i in range(n):
            if i != k:
                Laux[k] = Laux[k]*(X-Lx[i])/(Lx[k]-Lx[i])
        P = P + Laux[k]*Ly[k]
    return P
```

```
# Spline
var('x')
f(x) = exp(-x**2)
n = 100
a = -7
b = 7
Lx = [0 for i in range(n+1)]
def spline(x) :
    for j in range(n+1) :
          Lx[j] = a + (b-a)*j/n
    if x <Lx[0] :
        return f(Lx[0])
    if  x> Lx[n-1]  :
        return f(Lx[n])
    if  Lx[j] <=x<= Lx[j+1] :
            return  (f(Lx[j]) + (x-Lx[j])*(f(Lx[j+1])-f(Lx[j]))/(Lx[j+1]-Lx[j])).n(digits=10)
```

```
// calcul de la fonction dont on evalue l'aire
   function y = fonc(x)
        y = x^(2)
   //    y = x*(1-x)*(sin(200*x*(1-x)))^(2)

endfunction

// Méthode des trapèzes
  // calcul approché de l'integrale d'une fonction fonc définie sur [a,b]
  // approximation linéaire de la fonction sur des sous-segments de taille dh
  function E = trapezes(n,a,b)

    E = 0.
    dh = (b-a)/n
      for i=1:n
           x = a +(i-1)*dh
           y = a +(i)*dh
           E = E + dh*(fonc(x)+fonc(y))/3.
      end
endfunction
```

```
// calcul de la fonction dont on evalue l'aire
   function y = fonc(x)
        y = x^(2)
   //    y = x*(1-x)*(sin(200*x*(1-x)))^(2)

endfunction

// Méthode des rectangles
  // calcul approché de l'integrale d'une fonction fonc définie sur [a,b]:
  // approximation constante de la fonction sur des sous-segments de taille dh
   function E = rectangles(n,a,b)
    dh = (b-a)/n
      for i=1:n
           x = a +(i-1)*dh
           E = E + dh*fonc(a)
      end
endfunction
```