Introduction à l'analyse numérique
Année : 2017-2018
Formation : L2 Mathématiques

TP9 : Résolution numérique de l'équation de la chaleur

1 Résolution de l'équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur stationnaire dans une barre conductrice uni-dimensionnelle située entre $x = 0$ et $x = 1$. La température dans cette barre vérifie l'équation

$$-u''(x) = f(x), \; \forall x \in [0, 1] \tag{1}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = T_0,$$
$$u(1) = T_1,$$

ce qui signifie que la température est imposée à chaque extrémité de la barre, et vaut T_0 en $x = 0$ et T_1 en $x = 1$.

Pour résoudre numériquement cette équation, on découpe la barre en n segments de largeur $h = 1/n$. Pour tout i compris entre 0 et n, x_i est défini par $x_i = i\,h$. On note u_i l'approximation de $u(x_i)$ la solution exacte au point x_i.

Le système linéaire suivant approxime avec des valeurs discrètes l'équation (1) :

$$\frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \quad \forall\, 1 \leq i \leq n-1,$$
$$u_0 = T_0,$$
$$u_n = T_1,$$

1. Ecrire une fonction scilab `matrice` qui prend en argument un entier `n` et renvoie en sortie la matrice du système linéaire ci-dessus.
2. Ecrire une fonction scilab `second_membre` qui renvoie en sortie le vecteur second membre de ce système linéaire, en fonction de `n`, T_0, T_1, et du terme source f.
3. Utilisez ces fonctions pour calculer de manière approchée la solution de (1), avec $T_0 = T_1 = 0$ et $f(s) = 1$, avec n à faire varier (au moins supérieur à 10). Pour résoudre le système linéaire, vous pourrez par exemple utiliser la fonction scilab `gmres`.
4. La solution exacte de (1), avec $T_0 = T_1 = 0$ et $f(s) = 1$, est :

   $$u(s) = \frac{(1-s)s}{2}$$

   Comparez sur un graphique la solution exacte et la solution approchée, et calculez l'erreur max entre les deux, pour différentes valeurs de n. Affichez cette erreur en fonction de n sur une courbe en échelle logarithmique pour les deux axes. Que remarquez vous ?

5. Quelle est la solution exacte dans le cas de $f(s) = cos(\pi * s)$, avec $u(0) = 1$ et $u(1) = -1$? Effectuez pour ces paramètres la même étude numérique de convergence que dans la question précédente.

2 Pour aller plus loin : méthode de Jacobi pour résoudre le système linéaire

La méthode de Jacobi est une méthode itérative de résolution d'un système d'équation linéaire $Ax = b$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

On définit D comme la partie diagonale de la matrice A, $-E$ (attention au signe !) comme sa partie triangulaire inférieure, et $-F$ comme sa partie triangulaire supérieure. L'égalité

$$Ax = b,$$

est équivalente à

$$(D - E - F)x = b,$$

ou encore

$$x = D^{-1}(b + (E + F)x).$$

On définit alors la suite $(x^k)_{k \geq 0}$ par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & x^0 & \text{arbitraire} \\ \forall k \in \mathbb{N}, & x^{k+1} & = \quad D^{-1}(b + (E + F)x^k) \end{array} \right.$$

Lorsque la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge (ce qui n'arrive pas toujours), sa limite x vérifie alors $Ax = b$ et ses termes, pour un rang k assez grand, fournissent une approximation convenable de la solution du système.

1. Ecrivez une fonction `function x = jacobi(A,b,N)` qui prend comme arguments une matrice A, un vecteur b et un entier N, et renvoie l'approximation en N itérations de la solution du système linéaire associé $Ax = b$ par la méthode de Jacobi.

2. Appliquez cette fonction à la matrice du système linéaire de l'équation de la chaleur pour $n = 10$ et en faisant varier N.