Annales mathématiques Blaise Pascal

S. Paycha
M. Arnaudon

Projections de mouvements browniens régularisés via l'action d'un groupe de Lie hilbertien

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, nº 1 (1996), p. 103-110
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_1_103_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 1, 1996, pp.103-110

PROJECTIONS DE MOUVEMENTS BROWNIENS REGULARISES VIA L'ACTION D'UN GROUPE DE LIE HILBERTIEN

S.PAYCHA
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université Blaise Pascal
Complexe Universitaire des Cézeaux, 63 177 Aubière Cedex France

Ces notes sont écrites à partir de travaux communs [1], [2] et [3] avec

M. ARNAUDON
Institut de Recherche de Mathématiques Avancées
Université Louis Pasteur et C.N.R.S
7, Rue René Descartes, 67 084 Strasbourg Cedex France

Résumé:*Nous présentons des résultats de travaux récents ([1], [2], [3])- motivés en partie par des problèmes rencontrés en théorie de champs de jauge- concernant les projections d' une classe de martingales (que nous appellons mouvements Browniens régularisés) définies localement par une équation différentielle stochastique sur une variété hilbertienne, et projetées via l'action isométrique d'un groupe de Lie de dimension infinie sur cette variété. A l'aide de notions géométriques comme celle de minimalité des orbites, étendues au cas de la dimension infinie, nous proposons une généralisation dans le cas de variétés de dimension infinie, des résultats connus en dimension finie, comme le fait qu'un mouvement Brownien se projette (par une action isométrique) en un mouvement Brownien si ls orbites sont minimales.*

Summary: *We present here recent results established in [1], [2] and [3] -which were partly motivated by gauge theoretical problems- concerning projections of a class of martingales (which we shall refer to as regularised Brownian motions) locally defined by a stochastic differential equation on a Hilbert manifold and projected via the isometric action of an infinite dimensional Lie group on this manifold. With the help of geometric concepts such as the notion of minimality of orbits, extended to the infinite dimensional case, we generalise to the setting of infinite dimensional manifolds, well known results in the finite dimensional case, such as the fact that a Brownian motion projects (via an isometric action) onto a Brownian motion when the orbits are minimal.*

I. Introduction:

L' étude de projections de semi-martingales par l'action d'un groupe que nous présentons ici brièvement est motivée à l'origine par des problèmes que l'on rencontre dans la quantification fonctionnelle en théorie des champs de jauge. Cette méthode de quantification met en oeuvre des intégrales de chemin (fonction de partition ou fonctions de corrélation) du type " $\int_{\mathcal{P}} f(p)dp$", $\mathcal{P}$ étant une variété de chemins (de dimension infinie), "dp" une mesure de volume formelle sur la variété $\mathcal{P}$, f une fonction sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit G un groupe de symétries (qui est en général une variété de dimension infinie) de l'action classique correspondant à la théorie que l'on veut quantifier et supposons que ce groupe agisse sur $\mathcal{P}$ par une action:

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{P} &\to \mathcal{P} \\ (g,p) &\to p \cdot g, \end{aligned}$$

de telle manière que le quotient $X \equiv \mathcal{P}/G$ soit une variété C^∞ et la projection canonique $\pi : \mathcal{P} \to X$ induise une structure de fibré principal.

Décrivons rapidement et très formellement le principe du procédé de Faddeev-Popov qui permet de projeter l'intégrale de chemins sur $\mathcal{P}$ sur une intégrale de chemins sur le quotient $X = \mathcal{P}/G$. Lorsque la fonction f et la mesure de volume formelle sur $\mathcal{P}$ sont G-invariantes, on peut écrire formellement:

$$\text{"} \int_{\mathcal{P}} f(p)dp = (VolG) \int_X \bar{f}(x) J_x dx \text{"}$$

$VolG$ désignant le volume formel de G, $\bar{f}$ la projection de f, "dx" une mesure de volume sur X et J_x un déterminant Jacobien qui correspond essentiellement au déterminant de Faddeev-Popov utilisé en physique.

A défaut de pouvoir décrire en termes mathématiques cette projection de mesures de volume qui n'ont pas de sens sur des variétés de dimension infinie, nous nous intéressons ici à un problème similaire de projections de semi-martingales définies sur $\mathcal{P}$ sur des semi-martingales sur le quotient X. La motivation mathématique derrière ce passage du problème concernant les projections mesures de volume à celui de projections de semi-martingales vient du fait que sur une variété Riemannienne compacte, la mesure de volume est une mesure invariante pour le mouvement Brownien et qu'il est alors naturel d'interpréter le projeté de la mesure comme mesure invariante du processus projeté. En ce sens, l'étude des projections de semi-martingales que nous proposons ici est un pas vers une interprétation mathématique du procédé de Faddeev-Popov.

Cette étude pose, indépendemment de la motivation physique, des questions de nature géométrique intéressantes puisqu'elle recquiert une généralisation de notions bien connues en dimension finie (lorsque le groupe de Lie est compact) comme celle de minimalité et de variation volume d'orbites.

II. Le cas de la dimension finie

II.1 Le cadre géométrique

Afin de motiver les constructions géométriques en dimension infinie dont nous aurons besoin par la suite, commençons tout d'abord par décrire les projections de semi-martingales en dimension finie.

G est un groupe de Lie compact qui agit sur une variété Riemannienne de dimension finie par une action libre, C^∞ , isométrique et propre:

$$\begin{aligned} \Theta : G \times \mathcal{P} &\to \mathcal{P} \\ (g,p) &\to p \cdot g. \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, $X \equiv P/G$ est une variété Riemannienne (munie de la structure Riemannienne induite par celle de $\mathcal{P}$), et la projection canonique $\pi : \mathcal{P} \to X$ induit une structure de fibré principal avec groupe de structure G.

Il est alors intéressant de remarquer que:

1) Le mouvement Brownien sur $\mathcal{P}$ ne se projette en général pas en un mouvement Brownien sur le quotient X. Si les orbites pour l'action de G sont minimales, le projeté du mouvement Brownien est cependant un mouvement Brownien (ceci est un résultat classique et le lecteur pourra aussi consulter [1], [4], [5], [6] où le problème plus général de la factorisation de processus a été considéré dans divers contextes).
2) Une martingale sur $\mathcal{P}$ ne se projette en général pas sur une martingale sur le quotient X. Si les orbites pour l'action de G sont totalement géodésiques, le projeté d'une martingale est cependant une martingale [1], [3].

La nature des processus projetés dépend donc fortement de la géométrie des orbites, que nous décrivons maintenant brièvement.

II.2 Notion de minimalité d'orbites

Désignons par ∇ la connexion de Levi-Civita sur $\mathcal{P}$ et par O_p l'orbite du point p de $\mathcal{P}$ pour l'action du groupe G. On notera $V_p \equiv T_pO_p$ l'espace tangent vertical au point p. La métrique Riemannienne G-invariante induit une décomposition G-invariante de l'espace tangent

$$T_p\mathcal{P} = H_p \oplus V_p,$$

H_p étant l'espace horizontal au point p défini comme l'orthogonal de V_p dans $T_p\mathcal{P}$.

La *seconde forme fondamentale* S_p au point $p \in \mathcal{P}$ (voir par ex. [8], [9]) est définie par:

$$\begin{aligned} S_p : V_p \times V_p &\to H_p \\ (U,V) &\to (\nabla_U \bar{V})^h, \end{aligned}$$

l'indice h désignant la projection horizontale du vecteur tangent, $\bar{V}$ désignant un prolongement du vecteur vertical V en un champ de vecteurs verticaux (on montre que cette définition ne dépend pas du prolongement). On appelle orbite ***totalement géodésique***, tout orbite O_p pour laquelle la seconde forme fondamentale S_p est identiquement nulle.

Dans le cas où G est muni d'une mesure Ad_g invariante, la relation suivante qui provient d'un calcul simple [1], permet d'interpréter la trace de la seconde forme fondamentale en termes de variation de volumes d'orbites:

$$< trS_p, X >_p = -X log Vol(O_p).$$

Ici, $< \cdot, \cdot >_p$ désigne le produit scalaire sur $T_p\mathcal{P}$ associé à la métrique Riemannienne, $VolO_p$ désigne le volume de l'orbite pour la mesure de volume sur $\mathcal{P}$ induite par la métrique, X un champ de vecteurs horizontal. Une orbite ***minimale*** étant par définition une orbite O_p pour laquelle $trS_p = 0$, cette relation permet de retrouver-dans le cas particulier où G est muni d'une mesure Ad_g-invariante - le théorème de Hsiang qui dit que les orbites minimales coïncident avec les orbites de volume extrémal parmi les orbites de même type [9].

II.3 Projection de semi-martingales

Dans cette section, nous décrivons les projetés de semi-martingales dans le cas où la variété $\mathcal{P}$ est de dimension finie n. Soient $p \to a(p)$ et $p \to \mathcal{A}(p)$ deux champs localement Lipschitziens, $a(p) \in T_p\mathcal{P}$, $\mathcal{A}(p) : \mathbb{R}^n \to T_p\mathcal{P}$ et soit ξ une semi-martingale définie localement comme solution de l'équation différentielle stochastique (au sens d'Itô):

$$d\xi = \mathcal{A}(\xi)dB + a(\xi)dt.$$

On supposera de plus que le champ d'opérateurs $\mathcal{A}$ se scinde en un champ horizontal et un champ vertical $\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}^h(p) \oplus \mathcal{A}^v(p)$ et que a et $\mathcal{A}$ sont G-invariants, soit $a(p \cdot g) = R_g^* a(p)$ et $\mathcal{A}(p \cdot g) = R_g^* \mathcal{A}(p)$. Sous ces hypothèses, on peut montrer [3] que la semi-martingale ξ se projette en une semi-martingale $\bar{\xi}$ solution de l'équation différentielle stochastique qui s'écrit (au sens d'Itô) localement:

$$d\bar{\xi} = \overline{\mathcal{A}}(\bar{\xi})d\bar{B} + \bar{a}(\bar{\xi})dt - \frac{1}{2} tr_{\mathcal{A}^v} \bar{S}_{\bar{\xi}} dt$$

où $\bar{p}$ désignant le projeté du point p, on a défini $\bar{\mathcal{A}}(\bar{\partial})$ par $\bar{\mathcal{A}}(\bar{p}) \circ \pi_* = \pi_* \circ \mathcal{A}(p)$, où on a posé $\bar{a}(\bar{p}) = \pi_* a(p)$ $\bar{S}_{\bar{p}} = \pi_* S_p$, et où $tr_{\mathcal{A}^v} S_{\bar{p}} \equiv tr(S_p(\mathcal{A}^v(p)\cdot, \mathcal{A}^v(p)\cdot))$ désigne la trace pondérée par l'opérateur $\mathcal{A}^v(p)$ de la forme bilinéaire S_p.

Cette description du processus projeté montre donc d'une part qu'une semi-martingale du type $d\xi = \mathcal{A}(\xi)dB + a(\xi)dt$ (au sens d'Itô et avec les hypothèses ci-dessus sur $\mathcal{A}$ et a) se projette sur une diffusion, d'autre part qu'une martingale du type $d\xi = \mathcal{A}(\xi)dB$ (au sens d'Itô et avec les hypothèses ci-dessus sur $\mathcal{A}$) se projette sur une martingale si la trace pondérée par $\mathcal{A}^v$ de la seconde forme fondamentale s'annule (donc en particulier si les fibres sont totalement géodésiques). Elle permet aussi de retrouver le fait qu'un mouvement Brownien se projette en un mouvement Brownien lorsque les orbites sont minimales.

III. Le cas de la dimension infinie

III.1 Le cadre géométrique

Ici, $\mathcal{P}$ est une variété Riemannienne hilbertienne modelée sur un espace de Hilbert H, G est une variété Hilbertienne munie d'une structure de goupe pour laquelle la multiplication à droite est C^∞ qui agit sur $\mathcal{P}$ par isométries:

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{P} &\to \mathcal{P} \\ (g, p) &\to p \cdot g \end{aligned}$$

Désignons par τ_p l'opérateur tangent en $e \in G$ à

$$\begin{aligned} \theta_p : \mathcal{P} &\to \mathcal{P} \\ p &\to p \cdot g. \end{aligned}$$

Nous ne donnerons pas ici une description détaillée des hypothèses sur l'action du groupe G sur la variété $\mathcal{P}$, que le lecteur pourra lire dans [2], [3]. Disons ici simplement que l'on supposera que $\tau_p^*\tau_p$ est un Laplacien généralisé (au sens de [10]) sur une variété compacte sans bord et que l' action du groupe induit une structure de fibré principal $\mathcal{P} \to X = \mathcal{P}/G$, le quotient X étant une variété Riemannienne de dimension finie. Sous ces hypothèses, on a en particulier une décomposition orthogonale G-invariante de l'espace tangent en un espace horizontal $H_p = Im\tau_p^*$ et un espace vertical $V_P = Im\tau_p$.

Une famille de semi-martingales sur $\mathcal{P}$ est obtenue comme solution d'équations différentielles stochastiques définies (au sens d'Itô) localement par:

$$d\xi = \mathcal{A}(\xi)dB + a(\xi)dt,$$

$p \to a(p) \in T_p\mathcal{P}$ et $p \to \mathcal{A}(p)$ étant deux champs localement Lipschitziens, $\mathcal{A}(p) : H \to T_p\mathcal{P}$ un opérateur Hilbert-Schmidt.

Un choix naturel pour le champ d'opérateurs $\mathcal{A}(p)$ au sens où il est dicté par l'action du groupe est de prendre une famille d'opérateurs indexée par $\varepsilon > 0$ et construite à partir d' opérateurs de la chaleur $A^\varepsilon(p) \equiv e^{-\varepsilon\tau_p\tau_p^*}$. On posera pour cela

$$\mathcal{A}^\varepsilon(p) \equiv \mathcal{I}'(p) \oplus e^{-\varepsilon\tau_p\tau_p^*} \circ \mathcal{I}''(p)$$

où $\mathcal{I}'(p) : H' \to H_p$ est un opérateur (pas forcément injectif) vérifiant $\mathcal{I}'(p)\mathcal{I}'(p)^* = Id_{/H_p}$ et $\mathcal{I}''(p) : H_p'' \to V_p$ une isométrie, H' et H'' étant deux sous espaces vectoriels de H dont la somme directe est H. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux processus ξ^ε, que l'on appellera *processus Browniens régularisés* associés à l'action du groupe, définis localement comme solutions de l'équation différentielle stochastique (au sens d'Itô):

$$d\xi = \mathcal{A}^\varepsilon(\xi)dB = \mathcal{I}'(\xi)dB' + e^{-\varepsilon\tau_p\tau_p^*} \circ \mathcal{I}''(\xi)dB'',$$

B' désignant un mouvement Brownien à valeurs dans H', B'' un mouvement Brownien à valeurs dans H''. Afin d'étendre à ces mouvements Browniens régularisés, l'étude faite en dimension finie des projections de semi-martingales, nous commencerons tout d'abord par généraliser la notion de volume, de variation de volume et de trace de la seconde forme fondamentale pour les orbites d'une action de groupe vérifiant les hypothèses ci-dessus.

III.2 Notions de minimalité d'orbites en dimension infinie

La seconde forme fondamentale S_p étant une forme bilinéaire continue (voir [3] pour une discussion sur le choix de la topologie) sur l'espace tangent vertical V_p, on peut définir une famille de traces pondérées par les opérateurs Hilbert-Schmidt $A^\varepsilon(p)$, $\varepsilon > 0$:

$$tr_\varepsilon(S_p) \equiv tr(S_p(A^\varepsilon(p)\cdot, A^\varepsilon(p)\cdot)).$$

En utilisant le développement asymptotique lorsque $\varepsilon \to 0$ de la trace de l'opérateur de la chaleur $tr(e^{-\varepsilon\tau_p^*\tau_p})$, on peut définir une notion de trace renormalisée au sens de [2], [10]:

$$tr_{ren}(S_p) \equiv Lim_{\varepsilon\to 0} tr(S_p(A^\varepsilon(p)\cdot, A^\varepsilon(p)\cdot))$$

que nous n'expliciterons pas ici. Notons simplement que le choix de renormalisation n'est pas unique [2].

Une orbite O_p sera dite *fortement minimale* si $tr_\epsilon S_p = 0$ pour tout $\epsilon > 0$ et *minimale* si $tr_{ren}(S_p) = 0$. Ces deux notions coincident (pour un certain choix de renormalisation) en dimension finie avec la notion de minimalité décrite dans la section précédente.

III.2 Notions d'extrémalité du volume des orbites en dimension infinie

Les mêmes procédés de régularisation et de renormalisation s'appliquent au déterminant du Laplacien généralisé $\tau_p^* \tau_p$ et permettent de définir d'une part une famille indexée par ϵ de volumes

$$Vol_\epsilon(O_p) \equiv \sqrt{det_\epsilon(\tau_p^* \tau_p)}$$

d'une orbite O_p et d'autre part, le volume renormalisé

$$Vol_{ren}(O_p) \equiv \sqrt{det_{ren} \tau_p^* \tau_p}$$

de l'orbite O_p (là encore le choix de la renormalisation n'est pas unique).

Sous certaines hypothèses techniques sur l'action du groupe (voir [2]), on a pour un champ de vecteurs horizontal:

$$< tr_\epsilon S_p, X >_p = -X log Vol_\epsilon O_p \quad \forall \epsilon > 0$$

et

$$< tr_{ren} S_p, X >_p = -X log Vol_{ren} O_p$$

étant entendu ici que le choix de la renormalisation doit être le même de part et d'autre de l'égalité. Ces égalités offrent une généralisation du théorème de Hsiang [9] au cadre de la dimension infinie, ce qui avait déjà été fait dans [11] pour l'action du groupe des lacets sur l'algèbre de Lie correspondante et dans [12] pour l'action du groupe des automorphismes d'un fibré principal dans le cadre de la théorie de Yang-Mills.

III.3 Projections de mouvements Browniens régularisés

Sous certaines hypothèses sur l'action du groupe en partie décrites dans la section précédente et qui sont naturelles dans le cadre de la théorie des champs, la façon dont de projette un mouvement Brownien régularisé est très semblable à ce qui se passe pour un mouvement Brownien en dimension finie.

En effet, on peut montrer les résultats suivants [3]:

(i) Si les orbites de l'action du groupe G sur la variété $\mathcal{P}$ sont **fortement minimales**, tout **mouvement Brownien régularisé** localement décrit comme solution de l'équation différentielle stochastique (au sens d'Itô):

$$d\xi = \mathcal{A}^\epsilon(\xi) dB$$

se projette en un mouvement Brownien sur la variété quotient de dimension finie $X = \mathcal{P}/G$.

(ii) Un mouvement **Brownien renormalisé** -obtenu à partir d'un mouvement Brownien régularisé auquel on a rajouté une dérive (horizontale) qui compense les termes divergents- localement solution de l'équation différentielle stochastique (au sens d'Itô):

$$d\xi = \mathcal{A}^{\varepsilon}(\xi)dB + \frac{1}{2}(''\text{termes divergents en } \varepsilon'')dt$$

se projette en une famille de semi-martingales localement solutions de l'équation différentielle stochastique (au sens d'Itô):

$$d\xi = \mathcal{I}'(\xi)d\bar{B} - \frac{1}{2}(tr_{\varepsilon}(S_{\xi}) -''\text{ termes divergents en } \varepsilon'')dt$$

qui convergent uniformément lorsque ε tend vers 0 pour la convergence L^2 sur les compacts vers la semi-martingale sur X localement solution de l'équation différentielle stochastique (au sens d'Itô):

$$d\xi = \mathcal{I}'(\xi)d\bar{B} - \frac{1}{2}tr_{ren}(S_{\xi})dt.$$

(iii) En particulier, si les fibres sont minimales, les semi-martingales obtenues comme projetées d'une famille de mouvements Browniens renormalisés convergent vers le mouvement Brownien sur la variété Riemannienne quotient.

Références:

1. M.Arnaudon, S.Paycha, *Factorization of semi-martingales on infinite dimensional principal bundles*, Stochastics and Stochastic Reports, Vol. 53, p.81-107
2. M.Arnaudon, S.Paycha, *Regularisable and minimal orbits for group actions in infinite dimensions* , Manuscript 1995
3. M.Arnaudon, S.Paycha, *The geometric and physical relevence of some stochastic tools on Hilbert manifolds*, Manuscript 1995
4. M. Arnaudon,*Semi-martingales dans les espaces homogènes*, Ann.Inst. Henri Poincaré, Vol **29**, n.2, 1993, p 269-288
   M.Arnaudon, *Connexions et martingales dans les groupes de Lie*, Séminaire de Probabilité **XXV**
5. K.D.Elworthy, W.S.Kendall, *Factorisation of Harmonic maps and Brownian motions*, in "From local time to global geometry, Physics and Control", ed. K.D. Elworthy, Pitman/Longman p.75-83 (1986)
6. S.Albeverio, R.Hoegh-Krohn, D.Testard, A.Vershik, *Factorial representations of path groups*, J. F. A. **51**, p. 115-131 (1983)
7. B.Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, Pure and Applied Mathematics, A Series of monographs and textbooks, N.Y. 1973
8. J.Cheeger, D.G.Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland Mathematical Library, North Holland Publishing Company, 1975
9. W.Y. Hsiang, *On compact homogeneous minimal submanifolds*, Proc.Nat. Acad. Sci. USA **56** (1966) p 5-6

10. N.Berline, E.Getzler,M. Vergne, Heta-Kernels and Dirac Operators, Springer Verlag (1992)
11. C.King, C.L.Terng *Volume and minimality of submanifolds in path space*, in "Global Analysis and Modern Mathematics", edited by K.Uhlenbeck, Publish or Perish (1994)
12. Y.Maeda, S.Rosenberg, P. Tondeur, *The mean curvature of gauge orbits*, in "Global Analysis and Modern Mathematics", edited by K.Uhlenbeck, Publish or Perish (1994)