

Contrôle optimal par réduction de dynamique du sillage instationnaire d'un cylindre circulaire

Michel Bergmann, Laurent Cordier & Jean-Pierre Brancher

LEMTA, UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP)
ENSEM - 2, avenue de la forêt de Haye
BP 160 - 54504 Vandoeuvre cedex
Michel.Bergmann@ensem.inpl-nancy.fr

Résumé :

Dans cette étude, nous considérons pour problème modèle d'une configuration décollée, l'écoulement autour d'un cylindre de section circulaire pour un nombre de Reynolds de 200. Notre objectif est de minimiser l'instationnarité de sillage par rotation sinusoïdale du cylindre autour de son axe principal. La résolution de problèmes d'optimisation de grande taille restant d'un coût prohibitif, il existe une vraie demande de modèles d'ordre faible de dynamique permettant de représenter pour un coût de calcul limité l'essentiel de la dynamique non linéaire du système. L'approche spécifique suivie dans ces travaux est de construire un modèle réduit de dynamique basé sur la POD (Proper Orthogonal Decomposition). Par la suite, par utilisation d'une méthode adaptative proposée par Ravindran (2000), ce modèle est utilisé comme équation d'état dans le système optimal développé pour déterminer les paramètres de contrôle de l'écoulement. Les premiers résultats issus de la boucle d'optimisation sont finalement présentés.

Abstract :

In this study we consider the flow around a circular cylinder for a Reynolds number of 200 as a model problem of a separated flow. Our objective is to minimize the wake unsteadiness by sinusoidal rotation of the cylinder around its principal axis. Due to the prohibitive cost of resolution of large scale optimization problems, there is a true request for low order models of dynamics making it possible to represent at a limited calculation cost the main nonlinear dynamics of the system. The specific approach followed in this work is to build a reduced-order model based on POD (Proper Orthogonal Decomposition). Following the method introduced by Ravindran (2000), this reduced-order model is used as the state equations in the optimality system derived to estimate the flow control parameters. Finally, we present the first results obtained with this reduced-order adaptive controller based on POD.

Mots-clefs :

Contrôle optimal ; POD ; modèle réduit de dynamique

1 Introduction

Poussés par des intérêts économiques (réduction des coûts d'exploitations) et par des contraintes environnementales en termes de pollution et de bruit de plus en plus contraignantes, les industriels du domaine aéronautique et automobile ont apporté ces dernières années un regard attentif au contrôle actif d'écoulements et à l'optimisation de formes aérodynamiques. L'approche généralement utilisée pour résoudre ces problèmes d'optimisation est de coupler un code de calcul résolvant les équations de Navier-Stokes et un algorithme d'optimisation (Mohammadi et Pironneau, 2001). Toutefois, la résolution de problèmes d'optimisation de grande taille (plusieurs dizaines de millions de variables) reste d'un coût prohibitif (Bewley *et al.*, 2001), retardant d'autant des applications en temps réel. Il existe donc une vraie demande de modèles d'ordre faible de dynamique permettant de représenter pour un coût de calcul limité l'essentiel de la dynamique non linéaire du système.

Dans cette étude, nous considérons pour problème modèle d'une configuration décollée, l'écoulement autour d'un cylindre de section circulaire pour un nombre de Reynolds de 200. Notre objectif est de minimiser l'instationnarité de sillage par rotation sinusoïdale du cylindre autour de son axe principal (Tokumaru et Dimotakis, 1991). L'approche spécifique suivie dans ces travaux est de construire un système dynamique de dimension faible (en comparaison avec le nombre de variables discrètes prises en compte dans la résolution des équations de Navier-Stokes) par projection de Galerkin des équations du mouvement sur une base de fonctions propres obtenues par POD (Proper Orthogonal Decomposition). Ce modèle est par la suite utilisé, via une méthode adaptative proposée par Ravindran (2000), pour déterminer par contrôle optimal les paramètres de contrôle de l'écoulement.

2 Configuration et résolution numérique

L'écoulement de sillage en aval du cylindre est résolu sur un domaine bidimensionnel Ω (voir figure 1) supposé contenir un fluide visqueux incompressible et Newtonien. Les équations de continuité et de Navier-Stokes rendues adimensionnelles sont résolues en temps par une méthode de projection à trois pas et en espace par une méthode d'éléments finis (P_1, P_1) à l'aide de la boîte à outils équations aux dérivées partielles de Matlab. Tous les détails sur la méthode de résolution numérique peuvent être trouvés dans Cordier et Bergmann (2002b).

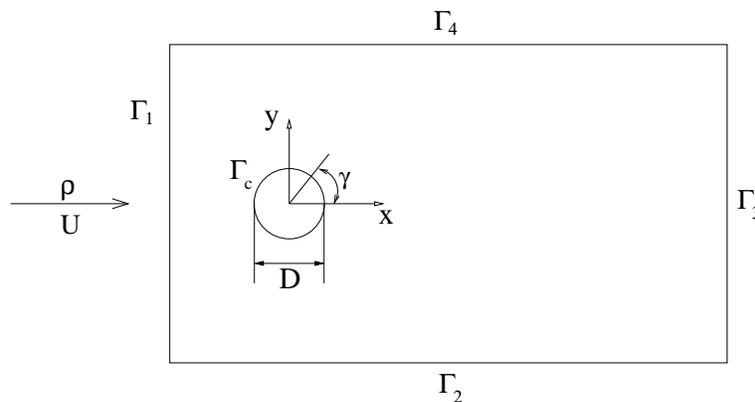


FIG. 1 – Géométrie du domaine (diamètre du cylindre=1; frontières entrée et sortie situées respectivement à 10 et 20 du centre du cylindre; hauteur=20).

Par la suite, nous considérerons que le cylindre tourne autour de son axe longitudinal à une vitesse angulaire γ supposée sinusoïdale : $\gamma(t) = A \sin(2\pi S_t t)$.

3 Décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)

Cette décomposition, introduite en turbulence par Lumley en 1967, consiste à rechercher dans un ensemble de réalisations de l'écoulement $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ avec $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+$, la réalisation $\Phi(\mathbf{X})$ "ressemblant le plus" en moyenne aux réalisations $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ i.e. la solution du problème suivant :

$$\max_{\Phi} \frac{\langle |(\mathbf{u}, \Phi)|^2 \rangle}{\|\Phi\|^2}. \quad (1)$$

Par construction, la réalisation $\Phi(\mathbf{X})$ solution du problème (1) maximise la représentation

énergétique de l'écoulement. Dans Cordier et Bergmann (2002a), on montre que l'équation (1) est équivalente à une équation intégrale de Fredholm¹ :

$$\int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \Phi_j^{(n)}(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda^{(n)} \Phi_i^{(n)}(\mathbf{X}) \quad (2)$$

où $R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$ est le tenseur des corrélations spatio-temporelles en deux points. Ce tenseur symétrique et défini positif, possède donc un ensemble de valeurs propres réelles et positives $\lambda^{(n)}$, qui par ailleurs forme une série décroissante et convergente. Les vecteurs propres associés $\Phi^{(n)}(\mathbf{X})$ sont orthogonaux, à divergence nulle et vérifient les conditions aux limites homogènes de la simulation numérique.

Selon que l'opération de moyenne $\langle \cdot \rangle$ apparaissant dans (1) soit évaluée en temps ou en espace, on trouve deux formulations équivalentes du problème POD (voir Cordier et Bergmann, 2002a, §5). Dans la première, dénommée méthode directe, le terme $R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$ est remplacé par $r_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ tenseur des corrélations spatiales et les fonctions propres $\Phi(\mathbf{X})$ par $\phi(\mathbf{x})$. Dans la seconde, appelée méthode des snapshots, l'équation de Fredholm à résoudre est définie par :

$$\int_T C(t, t') a^{(n)}(t') dt' = \lambda^{(n)} a^{(n)}(t) \quad (3)$$

où $C(t, t') = \frac{1}{T} \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t') d\mathbf{x}$ est le tenseur de corrélations temporelles. Cette approche étant plus appropriée dans le cas où une simulation numérique est utilisée pour déterminer les réalisations $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ nécessaires à la résolution de l'équation de Fredholm, cette méthode a été retenue dans nos travaux.

Enfin, l'ensemble des fonctions propres de la POD formant une base de l'écoulement, toute réalisation $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ peut s'écrire sous la forme du développement suivant :

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a^{(n)}(t) \phi_i^{(n)}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

4 Modèle réduit de la dynamique contrôlée du cylindre

4.1 Principe

La projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base de fonctions propres POD s'écrit (Cordier et Bergmann, 2002b) :

$$\left(\phi^{(i)}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \left(\phi^{(i)}, -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right)$$

ou encore

$$\left(\phi^{(i)}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \left(p, \nabla \cdot \phi^{(i)} \right) - [p \phi^{(i)}] - \frac{1}{Re} \left(\nabla \phi^{(i)}, (\nabla \mathbf{u})^T \right) + \frac{1}{Re} [(\nabla \mathbf{u})^T \phi^{(i)}] \quad (5)$$

$$\text{avec } [a] = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \text{ et } (A, B) = \int_{\Omega} A : B d\Omega = \sum_{i,j} \int_{\Omega} A_{ij} B_{ji} d\Omega.$$

¹Dans cette équation et par la suite, il y aura sommation implicite sur l'indice répété.

Pour que les conditions aux limites vérifiées par les fonctions propres POD soient homogènes, et cela même en cas d'application du contrôle au cylindre, on utilise la décomposition suivante (Graham *et al.*, 1999) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_{POD}} a^{(k)}(t) \boldsymbol{\phi}^{(k)}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

dans laquelle $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ et $\mathbf{u}_c(\mathbf{x})$ correspondent respectivement aux champs de vitesse moyen et à l'écoulement généré pour un contrôle unité et où N_{POD} est égal au nombre de réalisations de l'écoulement utilisées pour déterminer les fonctions POD.

L'introduction du développement (6) dans l'équation (5) conduit, en ne conservant dans la projection de Galerkin qu'un nombre de modes POD égal à $N_{gal} \ll N_{POD}$, au système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d a^{(i)}(t)}{dt} = & \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a^{(j)}(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a^{(j)}(t) a^{(k)}(t) \\ & + \mathcal{D}_i \frac{d\gamma}{dt} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a^{(j)}(t) \right) + \mathcal{G}_i \gamma^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Les coefficients \mathcal{A}_i , \mathcal{B}_{ij} , \mathcal{C}_{ijk} , \mathcal{D}_i , \mathcal{E}_i , \mathcal{F}_{ij} et \mathcal{G}_i dépendent de $\boldsymbol{\phi}$, \mathbf{u}_m et \mathbf{u}_c et sont explicités dans Cordier et Bergmann (2002a).

4.2 Résultats pour un contrôle défini par $A = 3$ et $S_t = 0, 5$

L'écoulement contrôlé est simulé pour $A = 3$ et $S_t = 0, 5$. Les fonctions POD sont déterminées par résolution de l'équation de Fredholm (3) à partir de 115 réalisations de l'écoulement prises uniformément sur une durée $T = 5, 75$ correspondant approximativement à la période naturelle de l'écoulement non contrôlé. Sur la figure 2, nous avons comparé l'évolution temporelle des coefficients de projection $a^{(i)}(t)$ obtenus par projection des réalisations de l'écoulement sur les fonctions propres POD à celle des coefficients évalués par intégration numérique du système (7) à partir de conditions initiales issues de la simulation numérique. On trouve que 6 modes POD (contenant 99% de l'énergie du système) sont suffisants pour représenter la dynamique contrôlée de l'écoulement.

5 Formulation contrôle optimal

5.1 Système optimal

Nous cherchons ici à déterminer par contrôle optimal, les paramètres A et S_t qui minimisent l'instationnarité du sillage i.e. l'amplitude des modes propres POD. Pour cela, nous introduisons la fonctionnelle coût suivante :

$$\mathcal{J}(\mathbf{a}, A, S_t) = \int_0^T J(\mathbf{a}, A, S_t) dt = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{N_{gal}} a^{(i)2} + \frac{\alpha}{2} A^2 + \frac{\beta}{2} S_t^2 \right) dt \quad (8)$$

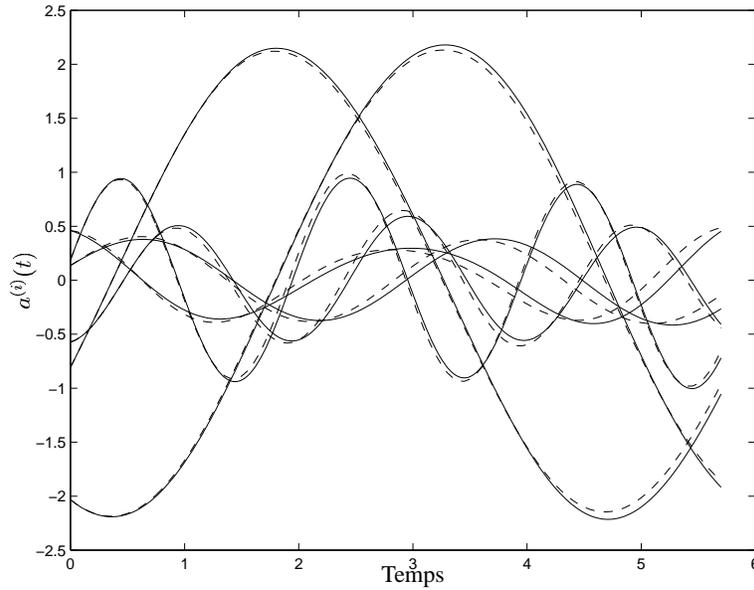


FIG. 2 – Evolution des coefficients de projection temporelle $a^{(i)}(t)$ pour $A = 3$, $S_t = 0,5$. Traits pleins : prédiction, traits pointillés : projection.

dans laquelle les coefficients $a^{(i)}(t)$ sont obtenus par résolution du système (7) et où les paramètres α et β sont des termes de pénalisation.

L'introduction de multiplicateurs de Lagrange $\xi_i(t)$, $i = 1, \dots, N_{gal}$ permet alors de transformer le problème de minimisation de la fonctionnelle (8) sous les contraintes imposées par le système (7) en un problème de minimisation sans contrainte d'une fonctionnelle Lagrangienne (Gunzburger, 1995). On obtient, après manipulations, un système optimal constitué par les équations d'état (7), par des équations adjointes (9) qu'il faut résoudre de T à 0 (car elles sont munies d'une condition terminale $\xi_i(T) = 0$) et par des conditions d'optimalité du premier ordre (10) et (11) qui ne sont vérifiées que lorsque le minimum est atteint.

Les équations adjointes sont données par :

$$\frac{d\xi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma(t) \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=1}^{N_{gal}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a^{(k)} \right) \xi_j - 2a^{(i)} \quad (9)$$

La condition d'optimalité pour l'amplitude est donnée par :

$$\delta A = \int_0^T \left(\alpha A + \sin(2\pi S_t t) \sum_{i=1}^{N_{gal}} \tilde{A}(t) \xi_i(t) \right) dt \quad (10)$$

où

$$\tilde{A}(t) = 2\pi S_t \cot(2\pi S_t t) \mathcal{D}_i + \mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a^{(j)} + 2A \sin(2\pi S_t t) \mathcal{G}_i$$

La condition d'optimalité pour le nombre de Strouhal est :

$$\delta S_t = \int_0^T \left(\beta S_t + (2\pi A) \cos(2\pi S_t t) \sum_{i=1}^{N_{gal}} \tilde{S}_t(t) \xi_i(t) \right) dt \quad (11)$$

où

$$\tilde{S}_t(t) = [1 - (2\pi S_t t) \tan(2\pi S_t t)] \mathcal{D}_i + t \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a^{(j)} \right) + 2A t \sin(2\pi S_t t) \mathcal{G}_i$$

5.2 Contrôle optimal par méthode adaptative et réduction de dynamique

Si il est maintenant clairement établi (Prabhu *et al.*, 2001) qu'un modèle réduit de dynamique déterminé pour une configuration non contrôlée de l'écoulement ne permet pas de représenter la dynamique contrôlée de celui-ci, il est cependant permis d'espérer que dans une certaine région de l'espace des paramètres de contrôle dite région de confiance, ce modèle d'ordre faible puisse être utilisé pour résoudre le système optimal. On comprend alors aisément qu'il soit nécessaire de reconstruire au cours du processus d'optimisation le système dynamique d'ordre faible, la difficulté étant de déterminer quand il est nécessaire de le faire. Une première approche naïve, dite méthode adaptative, a été proposée par Ravindran (2000). Le principe en est le suivant : partant de paramètres de contrôle initiaux $A^{(0)} = 3$, $S_t^{(0)} = 0,5$, on détermine par simulation numérique de l'écoulement des réalisations qui sont utilisées pour construire le modèle d'ordre faible (7) représentatif de la dynamique contrôlée. On résout ensuite les équations adjointes (9) puis on détermine par les équations (10) et (11) les variations des variables de contrôle δA et δS_t que l'on utilise, via un algorithme de plus grande descente couplé à une méthode de recherche linéaire, pour déterminer les nouveaux paramètres de contrôle $A^{(1)}$ et $S_t^{(1)}$. On itère alors cette procédure jusqu'à ce que la réduction de la fonctionnelle coût soit jugée suffisante ou que le contrôle n'évolue plus entre deux itérations successives.

La méthode qui vient d'être décrite a été mise en oeuvre. Les premiers résultats sont les suivants. On trouve après deux itérations de la boucle d'optimisation que les paramètres de contrôle sont égaux à $A = 2,986$ et $S_t = 0,697$ correspondant à une réduction relative de 4% de la fonctionnelle coût définie par (8).

6 Conclusions et perspectives

L'application de méthodes de contrôle actif à des écoulements à fort nombres de Reynolds autour de géométries complexes reste d'un coût de calcul prohibitif, nécessitant le développement de modèles réduits de dynamique décrivant l'essentiel des phénomènes. Dans cette étude, un modèle réduit de la dynamique contrôlée de l'écoulement a été développé par POD. A l'aide d'une méthode adaptative proposée par Ravindran (2000), ce modèle a été utilisé comme équation d'état dans le système optimal déterminé dans le but de réduire l'instationnarité du sillage par contrôle. Les premiers résultats de la boucle d'optimisation sont encourageants. L'approche proposée par Ravindran (2000) est actuellement confrontée à une méthode d'optimisation à région de confiance, utilisant des modèles réduits de dynamique construit par POD, récemment proposée par Fahl (2000) et intitulée TRPOD (*Trust Region POD*).

Références

- Bewley, T.R., Moin, P. et Temam, R. (2001) DNS-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark for feedback algorithms. *J. Fluid Mech.*, **447**, 179–225.
- Cordier, L. et Bergmann, M. (2002a) Proper Orthogonal Decomposition : an overview. *Lectures Series 2002-04* on post-processing of experimental and numerical data, Von Karman Institute for Fluid Dynamics.
- Cordier, L. et Bergmann, M. (2002b) Two typical applications of POD : coherent structures education and reduced order modelling. *Lectures Series 2002-04* on post-processing of experimental and numerical data, Von Karman Institute for Fluid Dynamics.
- Fahl, M. (2000) Trust-Region methods for flow control based on Reduced Order Modelling. PhD dissertation, Trier university.
- Graham, W.R., Peraire, J. et Tang, K.T. (1999) Optimal Control of Vortex Shedding Using Low Order Models. Part I. Open-Loop Model Development. *Int. J. for Numer. Meth. in Engrg.*, **44**(7), 945–520.
- Gunzburger M.D. (1995) : Flow control. *Springer*, New York.
- Lumley J.L. (1967) : The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, ed. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, pp. 166-178.
- Mohammadi, B. et Pironneau, O. (2001) Applied shape optimization for fluids. *Oxford University Press*.
- Prabhu R.D., Collis S. Scott and Chang Y. (2001) : The influence of control on proper orthogonal decomposition of wall-bounded turbulent flows. *Phys. Fluids*, **13** (2), pp. 520-537.
- Ravindran S.S. (2000) : Reduced-order adaptive controllers for fluid flows using POD. *J. of Scientific Computing*, **15**, N° 4, pp. 457-478.
- Sirovich, L. (1987) Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1 : Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, **XLV**, N°3, 561–571.
- Tokumaru P.T. et Dimotakis P.E. (1991) : Rotary oscillatory control of a cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, **224**, p. 77.