

# Optimisation aérodynamique par modèle réduit POD et méthode à région de confiance

Michel Bergmann, Laurent Cordier & Jean-Pierre Brancher

LEMTA, UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP)  
ENSEM - 2, avenue de la forêt de Haye  
BP 160 - 54504 Vandoeuvre cedex, France  
Michel.Bergmann@ensem.inpl-nancy.fr

## Résumé :

*L'objectif de cette étude est de minimiser, par rotation sinusoïdale, le coefficient de traînée moyen d'un cylindre circulaire en régime laminaire. Une procédure d'optimisation couplant modèle réduit par POD et méthode à région de confiance (TRPOD) est utilisée. Cette approche conduit à une réduction du coefficient de traînée de 30% pour un coût de calcul limité.*

## Abstract :

*The objective of this study is the mean drag minimization under rotary control of the cylinder wake in the laminar regime. The optimization problem is solved by a procedure that couples POD reduced order models and trust region method (TRPOD). Finally, 30% of relative mean drag reduction is found for reduced numerical costs.*

## Mots-clefs :

**Contrôle optimal ; réduction de modèle ; POD ; méthode à région de confiance ; sillage ; cylindre circulaire ; traînée.**

## 1 Introduction

### 1.1 De l'intérêt de la réduction de modèles en contrôle d'écoulement

Les coûts de calcul (CPU, mémoire) liés à la résolution des problèmes d'optimisation sont tellement importants que cette approche devient inadaptée aux applications du contrôle actif en boucle fermée, pour lesquelles le contrôleur a besoin de déterminer son action en temps réel. Dans cette communication, nous proposons de résoudre le problème d'optimisation associé au contrôle d'écoulement par une méthode de contrôle optimal dans laquelle les équations d'état ne sont plus constituées par les équations de Navier-Stokes mais par un modèle réduit de dynamique de l'écoulement contrôlé construit par POD (*Proper Orthogonal Decomposition*). Cette technique, introduite à l'origine en Turbulence [1] afin d'extraire les Structures Cohérentes, permet d'évaluer une base, optimale au sens de l'énergie, qui peut être utilisée par la suite pour construire par projection de Galerkin sur les équations du mouvement un modèle réduit de dynamique de l'écoulement contrôlé [2]. En dépit de l'optimalité énergétique de la base POD, il paraît cependant difficile de construire une fois pour toute, en début du processus d'optimisation, une base POD capable de décrire l'ensemble des écoulements susceptibles d'être rencontrés par le système au cours du processus d'optimisation (voir discussion menée en [3]). Une réactualisation de la base POD au cours du processus d'optimisation semble donc incontournable, la difficulté consistant à déterminer le moment où une nouvelle résolution des équations

de Navier-Stokes est nécessaire pour évaluer une nouvelle base POD. Par la suite, nous utiliserons un algorithme dénommé TRPOD pour *Trust Region POD* [4] qui couple méthode d'optimisation à région de confiance et modèles réduits POD (voir section 2).

## 1.2 Configuration de l'étude

Dans cette étude, nous cherchons à contrôler le sillage instationnaire existant en aval d'un cylindre circulaire (figure 1) pour un nombre de Reynolds  $Re = 200$  ( $Re = \frac{U_\infty D}{\nu}$  avec  $U_\infty$  vitesse à l'infini amont du cylindre,  $D$  son diamètre et  $\nu$ , la viscosité cinématique du fluide). L'écoulement est considéré comme incompressible et le fluide est supposé visqueux et Newtonien.

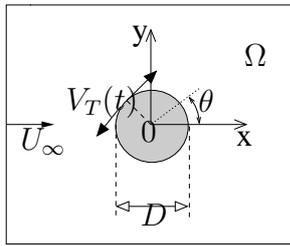


FIG. 1 – Représentation schématique de notre configuration d'écoulement contrôlé modèle.

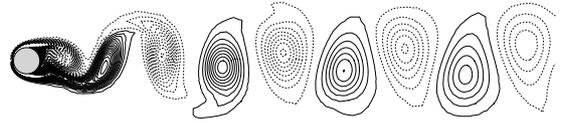


FIG. 2 – Écoulement non contrôlé ( $\gamma = 0$ ).

La dynamique d'un écoulement de sillage en régime laminaire est caractérisée par son nombre de Strouhal  $St$  défini comme  $St = \frac{fD}{U_\infty}$  où  $f$  est la fréquence caractéristique du comportement périodique de l'écoulement (Fig. 2). Le contrôle de l'écoulement est exercé par rotation instationnaire du cylindre autour de sa génératrice. Soit  $V_T$  la vitesse tangentielle du cylindre, le paramètre de contrôle du problème est  $\gamma(t) = V_T(t)/U_\infty$ . Pour  $\gamma = 0$ , l'écoulement sera dit non contrôlé. Dans la suite, nous recherchons la loi de contrôle  $\gamma$  sous forme harmonique *i.e.* telle que :

$$\gamma(t) = A \sin(2\pi St_f t)$$

où l'amplitude  $A$  et le nombre de Strouhal de *forçage*  $St_f$  correspondent aux deux degrés de liberté du contrôle.

## 2 Optimisation par méthodes à région de confiance et modèles réduits POD

Dans cette section, seul le principe de la méthode sera exposé. Pour tous les détails et en particulier les preuves de convergence, le lecteur est prié de se référer à [4, 3].

L'objectif est de résoudre le problème d'optimisation :

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{J}(\phi_{NS}(\mathbf{c}), \mathbf{c}) \quad (1)$$

où  $\mathcal{J} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction objectif et où  $\phi_{NS}(\mathbf{c})$  et  $\mathbf{c}$  représentent respectivement les variables d'état obtenues par résolution numérique des équations du système et les variables de contrôle. L'indice  $NS$  signifie que les équations d'état qui relient les variables de contrôle  $\mathbf{c}$  aux variables d'état sont les équations de Navier-Stokes. Il est possible, par résolution d'un système dynamique d'ordre réduit, de reconstruire ces variables par utilisation d'une base

POD. En notant  $\phi_{POD}$  ces variables, le problème (1) peut être remplacé par une suite de sous-problèmes de la forme

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{J}(\phi_{POD}(\mathbf{c}), \mathbf{c}). \quad (2)$$

Or, le modèle réduit de dynamique construit par POD ne représente la dynamique de l'écoulement contrôlé que sur une région limitée de l'espace des paramètres de contrôle dite *région de confiance*. Posons  $\Delta_k$  le rayon de la région de confiance et  $\mathbf{c}_k$  les paramètres de contrôle obtenus pour un itéré  $k$ . Pour évaluer la fonction  $\mathcal{J}(\phi_{NS}(\mathbf{c}_k), \mathbf{c}_k)$ , il est nécessaire de déterminer les variables  $\phi_{NS}(\mathbf{c}_k)$ . Ces variables sont obtenues par résolution des équations de Navier-Stokes. Lors de cette résolution, il est possible d'extraire des réalisations (snapshots) de l'écoulement contrôlé, et ainsi de générer une base POD  $\{\Phi_i\}_{i=1, \dots, N_{POD}}^k$ . Cette base est utilisée pour construire un modèle d'ordre faible. L'intégration temporelle de ce modèle d'ordre faible permet de reconstruire les champs  $\phi_{POD}(\mathbf{c}_k)$ , et donc d'évaluer la fonction  $\mathcal{J}(\phi_{POD}(\mathbf{c}_k), \mathbf{c}_k)$ . On définit ensuite la fonction

$$m_k(\mathbf{c}_{k+1}) = m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) = \tilde{\mathcal{J}}(\phi_{POD}(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k), \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) \quad (3)$$

comme fonction modèle de la fonction objectif

$$f(\mathbf{c}_{k+1}) = f(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) = \mathcal{J}(\phi_{NS}(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k), \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k), \quad (4)$$

à l'intérieur de la région de confiance  $\|\mathbf{s}_k\| \leq \Delta_k$ .

On est alors amené à résoudre le problème

$$\min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n} m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}) \quad \text{sous les contraintes} \quad \|\mathbf{s}\| \leq \Delta_k. \quad (5)$$

Il faut ensuite évaluer la performance des nouveaux paramètres de contrôle  $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k$  obtenus par résolution du problème (5). On compare ainsi la décroissance réelle de la fonction objectif,  $ared_k = f(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) - f(\mathbf{c}_k)$ , à la décroissance prédite par la fonction modèle,  $pred_k = m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) - m_k(\mathbf{c}_k)$ . Si la décroissance de la fonction objectif est jugée bonne, en comparaison de celle obtenue par la fonction modèle, le pas  $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k$  est accepté et le rayon de confiance est augmenté à l'itéré suivant. Si la décroissance est jugée moyenne, le pas est accepté et le rayon de confiance est maintenu. Enfin, si la décroissance est jugée mauvaise, le pas est refusé et le rayon de confiance est diminué. Afin d'évaluer la valeur de la fonction objectif au point  $\mathbf{c}_{k+1}$ ,  $f(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k)$ , il est nécessaire de déterminer une nouvelle solution du modèle de précision,  $\phi_{NS}(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k)$ . Un autre jeu de réalisations, qui correspond au nouveau contrôle  $\mathbf{c}_{k+1}$ , est disponible. Ce jeu sert alors à construire un nouveau modèle réduit, qui est représentatif de la dynamique modifiée par application des paramètres de contrôle  $\mathbf{c}_{k+1}$ .

### 3 Application à la réduction de traînée d'un cylindre circulaire

#### 3.1 Définitions des fonctions objectif et modèle

Afin de simplifier les notations futures, on introduit l'opérateur de traînée  $\mathcal{C}_D$  comme :

$$\mathcal{C}_D : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{U} \mapsto 2 \int_{\Gamma_c} \left( pn_x - \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} n_x - \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma = C_D(t), \quad (6)$$

où  $\mathbf{U} = (u, v, p)^T$  est le champ vectoriel correspondant aux variables de vitesse et de pression et  $C_D$ , le coefficient de traînée instationnaire. Les variables  $u$  et  $p$  présentes dans la relation (6) peuvent être obtenues soit par résolution du modèle de Navier-Stokes, soit par reconstruction à l'aide d'un modèle d'ordre réduit basé sur la POD. En effet, dans cette étude, une base POD  $\Phi_i$  représentative des champs de vitesse  $u$  et  $v$ , ainsi que du champ de pression  $p$  a été déterminée [3]. Par ailleurs, afin d'améliorer la robustesse du modèle réduit de dynamique, la base propre POD déterminée pour un paramètre de contrôle  $\mathbf{c}$  donné, a été augmentée en ajoutant  $N_{neq}$  modes de non-équilibre, suivant en cela la procédure décrite dans [6]. Les champs de vitesse et de pression peuvent alors se décomposer sur la base propre POD comme :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{c}, t) \mathbf{U}_c(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes de non-équilibre}}, \quad (7)$$

où  $\mathbf{U}_c$  est une solution particulière des équations de Navier-Stokes déterminée de telle manière que les fonctions propres soient homogènes sur le bord du domaine.

Le système dynamique POD d'ordre réduit, de dimension  $N_{gal} + N_{neq} + 1$ , est alors de la forme [3] :

$$\begin{aligned} \frac{d a_i(t)}{d t} = & \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ & + \mathcal{D}_i \frac{d \gamma}{d t} + \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma(\mathbf{c}, t) + \mathcal{G}_i \gamma^2(\mathbf{c}, t), \end{aligned} \quad (8a)$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \Phi_i(\mathbf{x})). \quad (8b)$$

En notant  $\phi_{NS}(\mathbf{c}) = (u_{NS}, v_{NS}, p_{NS})^T$  et  $\phi_{POD}(\mathbf{c}_{POD}) = (u_{POD}, v_{POD}, p_{POD})^T$ , la fonction objectif est

$$f(\mathbf{c}) = \mathcal{J}(\phi_{NS}(\mathbf{c})) = \frac{1}{T} \int_0^T C_D(\phi_{NS}(\mathbf{c})) dt,$$

et la fonction objectif modèle, introduite et justifiée dans [3], est

$$m_k(\mathbf{c}) = \tilde{\mathcal{J}}(\phi_{POD}(\mathbf{c})) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i dt,$$

où  $N_i = C_D(\Phi_i)$ .

Pour résoudre le sous-problème d'optimisation (5), le plus simple consiste à résoudre le système optimal construit à l'aide du modèle réduit de dynamique POD. Ce système optimal est constitué des systèmes et équations suivantes [3] :

– système d'état (8)

– système adjoint

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = - \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \left( \mathcal{B}_{ji} + \gamma(\mathbf{c}, t) \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a_k(t) \right) \xi_j(t) - \frac{1}{T} N_i, \quad (9a)$$

muni des conditions terminales suivantes :

$$\xi_i(T) = 0. \quad (9b)$$

– conditions d'optimalité

$$\nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{L} = \int_0^T \left( \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{L}_i \right) \nabla_{\mathbf{c}} \gamma dt, \quad (10)$$

avec

$$\mathcal{L}_i = -\frac{d\xi_i}{dt} \mathcal{D}_i + \xi_i \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j + 2\gamma(\mathbf{c}, t) \mathcal{G}_i \right).$$

Ce système peut être résolu à l'aide d'une méthode itérative décrite dans [3].

### 3.2 Résultats numériques et observations

Finalement, les paramètres de contrôle obtenus sont  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,738$  [3]. Ces paramètres sont déterminés en une dizaine d'itérations (10 résolutions du modèle de Navier-Stokes). Ces résultats sont semblables à ceux prédits par expérimentation numérique. Les paramètres de contrôle, obtenus par méthodes à région de confiance, convergent vers les paramètres de contrôle optimaux, et ce, quels que soient les paramètres de contrôle initiaux utilisés. Ceci prouve la performance et la robustesse de la méthode d'optimisation décrite ici. La figure 3 représente l'évolution temporelle du coefficient de traînée, pour un écoulement non contrôlé et pour l'écoulement forcé par les paramètres de contrôle optimaux. Ces résultats sont comparés avec les coefficients obtenus pour l'écoulement de base stationnaire instable. Cet écoulement de référence génère le coefficient de traînée le plus faible pour la configuration étudiée [7]. Le coefficient de traînée moyen passe d'une valeur égale à 1,39 dans le cas non contrôlé à une valeur égale à 0,99 lorsque les paramètres de contrôle optimaux sont appliqués. Une réduction relative de 30% est obtenue. La valeur du coefficient de traînée pour l'écoulement contrôlé s'approche de celle obtenue pour l'écoulement de base stationnaire instable ( $C_D = 0,94$ ). Par ailleurs, la dynamique de la vorticité a également un comportement similaire (voir Fig. 4).

## 4 Conclusions

Une procédure d'optimisation couplant méthodes à région de confiance et modèles réduits basés sur la POD a été mise en œuvre afin de minimiser le coefficient de traînée moyen du cylindre. Les paramètres de contrôle optimaux obtenus dans cette étude sont  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,738$ . La réduction relative du coefficient de traînée moyen est égale à 30%. Par ailleurs,

