

# Réduction de dynamique par Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD<sup>1</sup>)

L. Cordier et M. Bergmann  
LEMTA, UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP)

Ecole de printemps OCET  
Optimisation et Contrôle des Ecoulements et des Transferts  
12 – 17 Mars 2006, Aussois

---

<sup>1</sup>Proper Orthogonal Decomposition

## Table des matières

<b>1</b>	<b>La réduction de modèle</b>	<b>2</b>
1.1	Contexte . . . . .	2
1.2	Problématique générale . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres</b>	<b>4</b>
2.1	Introduction . . . . .	4
2.1.1	Un premier tour d’horizon . . . . .	5
2.1.2	Structure cohérente, POD et contrôle de la turbulence . . . . .	5
2.2	Méthode d’approximation . . . . .	6
2.3	La Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD) . . . . .	8
2.3.1	Définition . . . . .	8
2.3.2	Interprétations géométriques de la SVD . . . . .	9
2.3.3	Liens entre SVD et problèmes aux valeurs propres . . . . .	10
2.3.4	Approximation de rang minimum de $A$ . . . . .	11
2.3.5	Liens entre POD et SVD . . . . .	12
2.4	Exemple de compression d’images par SVD . . . . .	13
2.5	La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD) . . . . .	16
2.5.1	L’équation de Fredholm . . . . .	16
2.5.2	Propriétés des fonctions de bases POD . . . . .	18
2.5.3	Optimalité de la base POD . . . . .	19
2.5.4	Discussion sur la précision du modèle POD . . . . .	19
2.6	Les différentes approches . . . . .	20
2.6.1	Choix des réalisations . . . . .	20
2.6.2	Choix du produit scalaire . . . . .	21
2.6.3	Méthode classique . . . . .	22
2.6.4	Méthodes des snapshots . . . . .	23
2.6.5	Propriétés communes des deux approches POD . . . . .	24
2.6.6	Méthode des snapshots ou POD classique ? . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Modèles d’Ordre Réduit basés sur la POD (POD ROM)</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction . . . . .	25
3.1.1	Motivations . . . . .	25
3.1.2	Utilisation de modèles d’ordre réduit en optimisation . . . . .	26
3.2	Projection de Galerkin . . . . .	29
3.2.1	Généralités . . . . .	29
3.2.2	Modèles d’ordre faible basés sur la POD . . . . .	30
3.2.3	Conditions aux limites . . . . .	31
3.3	Application au cylindre . . . . .	33
3.3.1	POD du cylindre stationnaire . . . . .	33
3.3.2	Incorporation du contrôle dans le modèle POD . . . . .	38
3.4	Intégration et calibration du modèle d’ordre faible . . . . .	39
3.4.1	Intégration temporelle du système POD . . . . .	39
3.4.2	Calibration du système d’ordre faible . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Rappel sur les normes usuelles</b>	<b>53</b>
A.1	$p$ norme d’un vecteur . . . . .	53
A.2	Norme de Frobenius et $p$ norme d’une matrice . . . . .	53
	<b>Bibliographie</b>	<b>54</b>

“Without an inexpensive method for reducing the cost of flow computations, it is unlikely that the solution of optimization problems involving the three dimensional, unsteady Navier-Stokes system will become routine.”

Gunzburger (2000)

## 1 La réduction de modèle

### 1.1 Contexte

La détermination numérique d’une solution (même approchée) d’un processus physique non linéaire et complexe (par sa géométrie ou son caractère multiphysique par exemple) nécessite encore de nos jours des ressources informatiques conséquentes, que ce soit en temps de calcul ou en occupation mémoire. Pour fixer les ordres de grandeur d’un problème réaliste, Spalart *et al.* (1997) estiment que pour une voilure d’avion aux conditions de vol de croisière *i.e.* pour  $Re = O(10^7)$ , il est nécessaire d’employer environ  $10^{11}$  points et d’intégrer les équations de Navier-Stokes sur environ  $5 \cdot 10^6$  pas de temps. Il paraît donc délicat, avec les approches numériques utilisées actuellement en mécanique des fluides (éléments finis, volumes finis, . . .), de pouvoir aborder de manière courante des applications pour lesquelles, soit un grand nombre de résolutions du système d’état est nécessaire (méthodes de continuation, études paramétriques, problèmes d’optimisation ou de contrôle optimal, . . .), soit une solution en temps réel est recherchée (contrôle actif en boucle fermée par exemple). Idéalement, nous aimerions ramener le nombre important de degrés de liberté généralement nécessaire à la description dynamique du système physique ( $10^8$  points de grille, par exemple, dans le cas d’un écoulement de canal pourtant académique analysé récemment par Bewley, 2001) à quelques degrés de liberté en interaction effective. Ainsi, en acceptant de payer le coût d’une (ou plusieurs) résolutions du modèle détaillé, nous pourrions par la suite, pour le même coût numérique, réaliser un très grand nombre de simulations du modèle réduit de dynamique.

Etant donnée l’importance des enjeux, la réduction de modèle est une direction de recherche qui a été, et reste, très active dans de nombreux champs disciplinaires. Citons par exemple :

- en algèbre linéaire (Antoulas, 2005) : décomposition en valeurs singulières (*Singular Value Decomposition*, SVD), méthodes de Krylov, décomposition de Hankel,
- en statistique (Karhunen, 1946; Loève, 1955) : décomposition de Karhunen-Loève,
- en mécanique des fluides : les travaux sur la couche limite dans lesquels une approche classique consiste à remplacer les équations de Navier-Stokes par une combinaison de modèles plus simples, équations de couche limite de Prandtl près des parois solides et modèle non visqueux loin d’elles (Schlichting et Gersten, 2003),
- en turbulence : la modélisation de la turbulence consiste précisément à remplacer les équations de Navier-Stokes par des modèles plus simples à résoudre, modèles  $k - \epsilon$  ou LES, systèmes dynamiques d’ordre faible basés sur la décomposition orthogonale aux valeurs propres ou POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) comme dans Aubry *et al.* (1988); Ukeiley *et al.* (2001).

### 1.2 Problématique générale

La problématique générale associée à la réduction de modèle est décrite de manière schématique à la figure 1. Partant d’un système physique quelconque, et de données évaluées expérimentalement ou numériquement, la phase de modélisation consiste à déterminer un ensemble d’équations différentielles ordinaires (EDOs) ou d’équations aux dérivées partielles (EDPs) représentatif du système physique. Dans le cas où un système d’EDPs est obtenu dans la phase de modélisation, celui-ci est généralement discrétisé en espace afin d’obtenir un système d’EDOs que l’on nomme par la suite  $\mathcal{S}$ . La phase de réduction de modèles consiste à déterminer un système dynamique  $\widehat{\mathcal{S}}$  en réduisant de manière appropriée le nombre d’EDOs nécessaire à la description du système. Finalement, le modèle réduit  $\widehat{\mathcal{S}}$  est utilisé pour simuler ou contrôler le système  $\mathcal{S}$ . Eventuellement, le système d’EDOs est également discrétisé en temps, conduisant alors à un système dynamique discret.

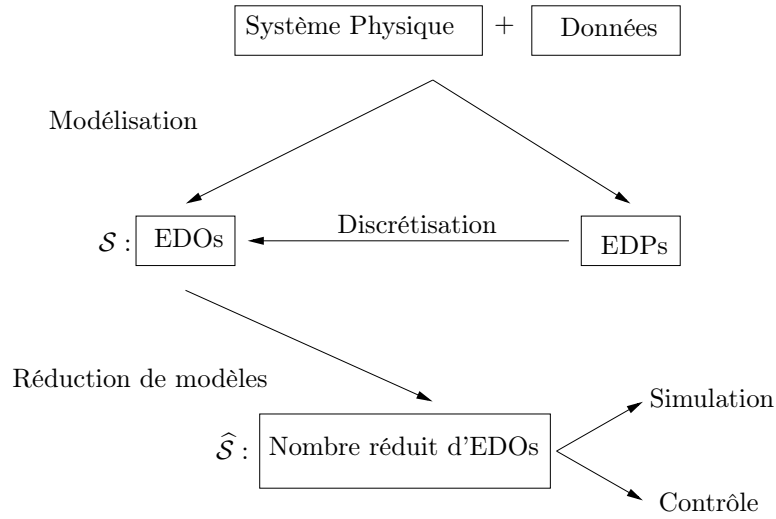


FIGURE 1 – Description schématique de la réduction de modèles.

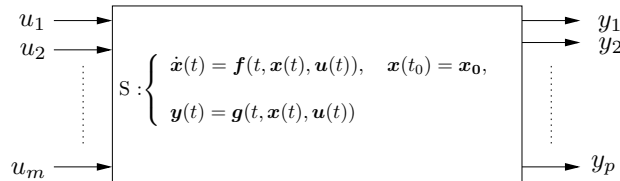
Soit  $\mathbb{T}$  l'ensemble des valeurs prises par le temps (selon le cas, on pourra considérer  $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{R}^-$  ou  $\mathbb{R}$  pour un système continu en temps, ou  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+$ ,  $\mathbb{Z}^-$  ou  $\mathbb{Z}$  pour un système discret), on considère que le système  $\widehat{\mathcal{S}}$  peut s'écrire de manière générique comme un système d'EDOs du premier ordre, soit :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \end{cases} \quad (1)$$

où

- $\mathbf{x} \in \mathbb{X} = \{\mathbf{x} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n\}$  est la variable d'état,
- $\mathbf{u} \in \mathbb{U} = \{\mathbf{u} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^m\}$  la variable d'entrée ou de commande,
- $\mathbf{y} \in \mathbb{Y} = \{\mathbf{y} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^p\}$  la variable de sortie ou l'observable,

et où  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  sont des fonctions vectorielles correctement dimensionnées. Le système  $\mathcal{S}$  peut donc être représenté par le schéma de la figure 2.

FIGURE 2 – Représentation schématique du système dynamique  $\mathcal{S}$ .

L'objectif de la réduction de modèle est donc de remplacer le système (1) par

$$\widehat{\mathcal{S}} : \begin{cases} \dot{\widehat{\mathbf{x}}}(t) = \widehat{\mathbf{f}}(t, \widehat{\mathbf{x}}(t), u(t)), \\ \widehat{\mathbf{y}}(t) = \widehat{\mathbf{g}}(t, \widehat{\mathbf{x}}(t), u(t)), \end{cases} \quad (2)$$

avec

- $\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{X}} = \{\widehat{\mathbf{x}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^r\}$  avec  $r \ll n$ ,
- $\widehat{\mathbf{y}} \in \mathbb{Y} = \{\mathbf{y} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^p\}$ .

Par ailleurs, la construction du modèle réduit  $\widehat{\mathcal{S}}$  doit être réalisée en s'assurant de vérifier si possible l'ensemble des conditions suivantes :

1. erreur d'approximation faible *i.e.*

$$\|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}\| < \epsilon \cdot \|\mathbf{u}\|$$

quelle que soit l'entrée  $\mathbf{u}$  où  $\epsilon$  est ici une tolérance donnée ;

2. stabilité et passivité (pas de génération d'énergie) du système  $\mathcal{S}$  préservées ;

### 3. procédure de réduction stable numériquement et efficace.

Souvent en pratique le système  $\mathcal{S}$  non linéaire est linéarisé autour d'une solution d'équilibre. On détermine ainsi un système linéaire dont les paramètres sont variables en temps que l'on peut encore noter  $\mathcal{S}_{LPTV}$  où *LPTV* signifie *Linear, Parameter, Time-Varying*. Ce système est donné par :

$$\mathcal{S}_{LPTV} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t), \end{cases}$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

Finalement, si les paramètres du système ne dépendent pas du temps, on obtient le système  $\mathcal{S}_{LTI}$  où *LTI* signifie ici *Linear Time-Invariant*. Ce système est alors représenté par :

$$\mathcal{S}_{LTI} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t). \end{cases} \quad (3)$$

Les systèmes  $\mathcal{S}_{LPTV}$  et  $\mathcal{S}_{LTI}$  ont été abondamment analysés par les automaticiens ou les mathématiciens appliqués (Zhou *et al.*, 1996, par exemple). Dans le cas des systèmes linéaires, de nombreux résultats existent donc sur la réduction de modèles de systèmes dynamiques de grande dimension et la recherche est toujours active dans ce domaine comme le prouvent de très récentes publications sur le sujet (Antoulas, 2005; Benner *et al.*, 2005). Selon Antoulas (2005), trois grandes classes de méthodes d'approximation existent (voir tableau 1) :

1. celles basées sur la Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD),
2. celles basées sur une méthode de Krylov,
3. enfin, des méthodes itératives combinant certains aspects provenant d'une méthode de Décomposition en Valeurs Singulières et d'autres provenant d'une méthode de Krylov.

méthodes basées sur la SVD		méthodes de Krylov
<i>Systèmes non-linéaires</i>	<i>Systèmes linéaires</i>	
Méthodes POD	"Balanced truncation"	Lanczos
Grammiens empiriques	Approximation d'Hankel	Arnoldi
		Interpolation
<b>méthodes SVD-Krylov</b>		

TABLE 1 – Classification des méthodes de réduction de modèles d'après Antoulas (2005).

Ces méthodes possédant toutes des forces et des faiblesses différentes, il serait certainement intéressant de les tester pour des problèmes de mécanique des fluides. Cependant, les équations de Navier-Stokes étant non linéaires, peu de méthodes sont directement utilisables, à moins de linéariser le système d'état autour d'une solution d'équilibre. Citons par exemple les travaux d'Allan (2000), dans lesquels une méthode basée sur les sous-espaces de Krylov a été mise en œuvre avec succès afin de contrôler en boucle fermée l'écoulement dans une cavité entraînée. Dans la suite de ces notes, on s'intéressera exclusivement aux techniques dédiées aux systèmes non linéaires et on présentera plus particulièrement la réduction de modèles par POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) car c'est la méthode actuellement la plus utilisée en mécanique des fluides et en turbulence.

## 2 Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres<sup>2</sup>

### 2.1 Introduction

La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD) est une technique élégante et très efficace d'analyse de données, qui permet d'approximer un système de dimension élevée par un autre de dimension

<sup>2</sup>Pour l'essentiel, cette section est fidèle à la présentation de la POD réalisée dans le cadre de cours donnés à l'Institut Von Kármán (Cordier et Bergmann, 2002a). Des compléments, en particulier sur l'application de la POD à la modélisation d'écoulements turbulents par système dynamique d'ordre faible, pourront être trouvés dans Berkooz *et al.* (1993); Cordier (1996); Holmes *et al.* (1996).

nettement plus faible (Antoulas, 2005, par exemple). Cette méthode est une procédure linéaire<sup>3</sup>, qui consiste à déterminer une base de modes propres orthogonaux représentatifs par définition (équation 19) des réalisations les plus probables. Ces modes propres sont obtenus par résolution d’une équation intégrale de Fredholm (équation 21) dont le noyau est construit à partir d’un ensemble de données provenant selon le cas de simulations numériques ou d’expériences. Enfin, on peut montrer que ces fonctions propres sont optimales au sens de la représentation énergétique (§ 2.5.3), ce qui nous permet d’espérer pouvoir les utiliser pour construire un modèle réduit de dynamique d’un système physique quelconque (section 3).

### 2.1.1 Un premier tour d’horizon

Historiquement, la POD a été introduite en turbulence par Lumley comme une méthode objective permettant d’identifier et d’extraire les structures cohérentes d’un écoulement (lire Adrian *et al.*, 1996, pour une discussion générale sur les structures cohérentes et une présentation des méthodes usuelles de détection). Intuitivement, la POD peut être vue comme une idée naturelle pour remplacer<sup>4</sup> la décomposition de Fourier lorsque les directions de l’écoulement ne peuvent plus être supposées homogènes ou périodiques. Ce problème étant assez général, cela explique que la décomposition orthogonale ait été redécouverte de manière régulière au siècle dernier. En effet, la POD est encore connue dans d’autres domaines scientifiques sous le nom de Décomposition de Karhunen-Loève (Karhunen, 1946; Loève, 1955) ou analyse d’Hotelling (Hotelling, 1933) et elle possède des liens très étroits avec l’Analyse en Composantes Principales (Joliffe, 1986) et surtout, comme on le verra à la section 2.3, avec la Décomposition aux Valeurs Singulières (Golub et Van Loan, 1990). Au delà du domaine historique d’application lié à la turbulence, la POD couvre maintenant un vaste domaine d’utilisations regroupant toutes sortes de disciplines. On la retrouve par exemple dans des applications au traitement d’images pour la caractérisation de visages humains (Kirby et Sirovich, 1990) ou pour l’étude de l’activité neuronale (Sornborger *et al.*, 2003), en analyse de signal (Algazi et Sakrison, 1969), en compression de données (Andrews *et al.*, 1967) et beaucoup plus récemment en contrôle optimal (Ravindran, 2000a,b; Afanasiev et Hinze, 2001; Bergmann *et al.*, 2005; Bergmann et Cordier, 2006). Le point central de toutes ces applications est l’extraction des caractères dominants d’un ensemble de données, permettant d’accéder ainsi à une réduction du modèle dynamique.

### 2.1.2 Structure cohérente, POD et contrôle de la turbulence

Dans cette section, notre objectif n’est pas de réaliser une étude bibliographique exhaustive de toutes les applications de la POD à des écoulements turbulents car elle sont nombreuses et variées. Nous renvoyons le lecteur, intéressé par plus d’informations sur ce sujet, aux très bonnes revues bibliographiques que l’on peut trouver dans Holmes *et al.* (1996); Delville *et al.* (1999) et dans l’annexe de Gordeyev (1999). Plus modestement, l’objet de ce paragraphe est de sensibiliser le lecteur au rôle que peuvent jouer les structures cohérentes sur le contrôle d’écoulement turbulent et l’importance de leur prise en compte par des outils de modélisation adaptés.

L’importance des structures cohérentes pour la compréhension et la modélisation des écoulements turbulents est maintenant clairement reconnue (Bonnet et Delville, 2002, par exemple). En effet, d’un point de vue énergétique, la contribution des structures cohérentes à l’énergie totale de l’écoulement varie, selon les cas, de 10% (couche limite, jet lointain) à 25% (couche de mélange, sillage, jet en champ proche). Par ailleurs, d’un point de vue dynamique, les structures cohérentes jouent un rôle très important dans les processus de mélange, ainsi que pour la génération de bruit ou la création de traînée par exemple. Par conséquent, contrôler des écoulements turbulents en agissant sur les structures cohérentes a rapidement été considéré comme une direction de recherche prometteuse (Aubry *et al.*, 1988; Ukeiley *et al.*, 2001).

La proposition faite par Lumley en 1967 d’extraire les structures cohérentes d’un écoulement turbulent par POD est très attractive. En effet, comparée à d’autres techniques d’identification<sup>5</sup> utilisées jusqu’alors,

<sup>3</sup>Pour s’en convaincre, il suffit de regarder l’équation (34). Cependant, ce n’est pas parce que le processus est linéaire que la POD est limitée aux systèmes linéaires (voir tableau 1).

<sup>4</sup>On peut démontrer (Cordier et Bergmann, 2002a) que la POD est une généralisation de la décomposition de Fourier aux directions inhomogènes ou non périodiques d’un écoulement.

<sup>5</sup>Grossièrement, les méthodes d’extraction de structures cohérentes appartiennent à trois catégories (Bonnet et Delville, 2002) :

1. les techniques de visualisation : PIV (*Particle Image Velocimetry*), PFV (*Pseudo Flow Visualisation*),

la POD ne nécessite pas de connaissance *a priori* de l'écoulement. Par POD, les structures cohérentes sont définies sans ambiguïtés et de manière unique comme la réalisation de l'écoulement qui possède la plus grande projection en moyenne sur l'ensemble des réalisations contenues dans la base de données (équation 19). Par ailleurs, les fonctions propres POD sont optimales au sens énergétique, dans le sens où aucune autre base n'est capable de capturer une aussi grande quantité d'énergie avec le même nombre de modes (section 2.5.3). A titre d'illustration, le lecteur trouvera dans Cordier et Bergmann (2002b) une application de la POD à l'extraction des structures cohérentes tridimensionnelles d'un écoulement de couche de mélange simulé par Simulation aux Grandes Echelles.

Jusqu'ici la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres a été présentée uniquement comme une technique particulière d'analyse de données. Cependant, la POD peut également être vue comme une méthode efficace de construction d'un système dynamique d'ordre réduit, pouvant décrire l'évolution temporelle des structures cohérentes. Le principe, qui sera détaillé à la section 3 où on trouvera une application au cylindre circulaire manipulé, consiste à projeter (projection de Galerkin) les équations d'état du système (généralement les équations de Navier-Stokes) sur le sous-espace engendré par les fonctions propres POD. Après quelques manipulations algébriques, on aboutit alors à un système d'équations différentielles ordinaires qui peut être facilement intégré en temps pour décrire la dynamique temporelle de l'écoulement. Finalement, les fonctions propres POD étant optimales au sens de l'énergie, seul un très petit nombre de modes POD est nécessaire pour décrire correctement l'évolution dynamique du système. Récemment, les modèles d'ordre réduit basés sur la POD ont reçu un regain d'intérêt (Graham *et al.*, 1999a,b; Fahl, 2000; Volkwein, 2001), notamment pour des applications liées au contrôle de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles d'ordre élevé et, en particulier, pour le contrôle d'écoulement. C'est précisément la démarche qui est suivie dans notre groupe (Bergmann *et al.*, 2005; Bergmann et Cordier, 2006). Cependant, il faudra apporter un soin tout particulier à la prise en compte de manière implicite (via les fonctions propres POD) et/ou explicite (via les conditions aux limites) de la loi de contrôle recherchée. En effet, jusqu'à une époque récente, le système réduit POD construit pour un écoulement non manipulé, était utilisé sans modifications pour développer des méthodologies de contrôle d'écoulement. Or, les fonctions propres POD, en tant que modes intrinsèques de l'écoulement, sont connues (Prabhu *et al.*, 2001) pour dépendre des conditions (géométrie, contrôle) utilisées pour assembler la base de données servant à la détermination des modes POD. Nous décrirons à la section 3.3.2, une méthode de prise en compte explicite du contrôle dans le modèle réduit POD. Les stratégies de prise en compte implicite du contrôle dans le modèle réduit POD seront, quant à elles, discutées dans le séminaire de Michel Bergmann et font l'objet des publications suivantes :

- Bergmann *et al.* (2005) pour le contrôle sous-optimal, et
- Bergmann et Cordier (2006) pour le contrôle optimal

d'un écoulement de sillage manipulé, publications vers lesquelles le lecteur pourra se reporter pour de plus amples précisions sur les difficultés liées à l'application de la réduction de modèles par POD au contrôle d'écoulement.

Dans cette section, nous allons réaliser une présentation aussi rigoureuse que possible de la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres. La POD est d'abord introduite dans le contexte général des méthodes d'approximation (section 2.2). Puis, étant donné que la POD peut être considérée comme un cas particulier de décomposition aux valeurs singulières, nous définissons, dans un premier temps la SVD (§ 2.3), avant de préciser leurs liens à la section 2.3.5. Par la suite (§ 2.5), nous décrivons la décomposition orthogonale dans un contexte statistique approprié aux écoulements turbulents. Finalement à la section 2.6, nous discutons des différentes approches utilisées en pratique pour déterminer les fonctions propres POD. Nous insisterons tout particulièrement sur les différences existant entre la méthode classique (§ 2.6.3) et la méthode des snapshots (§ 2.6.4) qui est souvent utilisée en pratique.

## 2.2 Méthode d'approximation

Une première manière d'introduire la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres, est de le faire en suivant le point de vue de Chatterjee (2000) et de considérer pour cela le cadre général des méthodes d'approximation (Rivlin, 1981).

- 
2. les méthodes conditionnelles qui reposent sur des critères donnés *a priori* supposés caractériser les structures cohérentes. Citons la méthode des quadrants, les techniques VITA/VISA, ...
  3. les méthodes non conditionnelles : corrélations spatio-temporelle, analyse spectrale, POD.

La reconnaissance de formes (*Pattern Recognition Analysis*), l'estimation stochastique linéaire (*Linear Stochastic Estimation*) et les ondelettes sont considérées à la fois comme une méthode conditionnelle et une méthode non conditionnelle.

Le problème à résoudre peut s'énoncer de la manière suivante : comment approcher une fonction  $u$  éventuellement vectorielle, dépendante des variables d'espace  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} \in \Omega$ ) et de temps  $t$  ( $t \in [0, T]$ ), par une somme finie de termes s'écrivant comme un produit de fonctions à variables séparées du type :

$$u(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{k=1}^K a_k(t) \Phi_k(\mathbf{x}), \quad (4)$$

l'objectif étant que cette approximation devienne exacte lorsque le nombre de termes  $K$  de la sommation devient infinie. Puisque cette représentation n'est certainement pas unique, il est logique de chercher à vouloir construire la meilleure approximation possible (dans un sens à définir) pour une valeur de  $K$  donnée. Nous allons montrer qu'en choisissant une représentation au sens de la norme euclidienne  $L^2$  définie à la section A, la solution du problème est donnée par la décomposition aux valeurs singulières.

Généralement, pour résoudre ce problème d'approximation, on considère que les fonctions de base  $\Phi_k$  qui interviennent dans le développement (4) sont des fonctions connues *a priori* comme les polynômes de Chebyshev ou de Legendre, ou encore des fonctions trigonométriques (Peyret, 2002). Une autre manière de résoudre ce problème est de considérer des fonctions  $\Phi_k$  intrinsèques par nature à la fonction  $u$  à approximer. Comme on va le voir, cette approche est celle qui conduit de manière naturelle à la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres.

Une autre difficulté de ce problème d'approximation est qu'à chaque famille de fonctions de base  $\Phi_k$  est associé un ensemble de fonctions temporelles  $a_k(t)$ . Par conséquent, connaissant les fonctions de base  $\Phi_k$ , comment déterminer le plus simplement possible les coefficients de projection temporelle  $a_k(t)$  ? Supposons que nous avons choisi pour fonctions  $\Phi_k$  une base orthonormale pour le produit scalaire canonique, *i.e.*

$$\int_{\Omega} \Phi_{k_1}(\mathbf{x}) \Phi_{k_2}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{k_1 k_2} = \begin{cases} 0 & \text{for } k_1 \neq k_2, \\ 1 & \text{for } k_1 = k_2, \end{cases}$$

où  $\delta_{k_1 k_2}$  est le symbole de Kronecker.

Le produit scalaire de la relation (4) par une fonction de base  $\Phi_l$  quelconque donne alors immédiatement l'expression :

$$a_l(t) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) \Phi_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (u(\mathbf{x}, t), \Phi_l(\mathbf{x})),$$

où la notation  $(\cdot, \cdot)$  représente le produit scalaire de deux fonctions.

Par conséquent, pour une famille de fonctions orthonormées, le coefficient  $a_k$  dépend seulement de la fonction  $\Phi$  d'ordre  $k$  et non des autres fonctions. En terme de simplification, imposer l'orthonormalité à la famille de fonctions  $\Phi_k$  paraît donc intéressant.

Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, nous allons maintenant chercher à déterminer, une fois pour toutes, une famille de fonctions orthonormales  $\Phi_k$  telles que l'approximation (4), à un ordre  $K$  quelconque, soit aussi bon que possible au sens des moindres carrés. Pour cela, nous allons supposer que l'on connaît les valeurs de la fonction  $u$  en  $N_x$  localisations spatiales  $x_1, x_2, \dots, x_{N_x}$  et cela en  $N_t$  instants différents. Résoudre le problème d'approximation (4) est alors équivalent à déterminer la base orthonormée  $\{\Phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^K$  avec  $K \leq N_t$  solution du problème :

$$\min \sum_{i=1}^{N_t} \|u(\mathbf{x}, t_i) - \sum_{k=1}^K (u(\mathbf{x}, t_i), \Phi_k(\mathbf{x})) \Phi_k(\mathbf{x})\|_2^2. \quad (5)$$

Pour faciliter la résolution de ce problème de minimisation, l'ensemble des réalisations  $\mathcal{U} = \{u(\mathbf{x}, t_1), \dots, u(\mathbf{x}, t_{N_t})\}$  de la fonction  $u$  est généralement rangé dans la matrice suivante, appelée encore matrice des Snapshots

$$A = \begin{pmatrix} u(x_1, t_1) & u(x_1, t_2) & \cdots & u(x_1, t_{N_t-1}) & u(x_1, t_{N_t}) \\ u(x_2, t_1) & u(x_2, t_2) & \cdots & u(x_2, t_{N_t-1}) & u(x_2, t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u(x_{N_x}, t_1) & u(x_{N_x}, t_2) & \cdots & u(x_{N_x}, t_{N_t-1}) & u(x_{N_x}, t_{N_t}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_t} \quad (6)$$



On constate que chaque colonne  $i$  de la matrice  $A$  représente, à un instant donné  $t_i$ , un ensemble de réalisations appartenant à  $\mathcal{U}$ . Par conséquent, si les données utilisées pour construire la matrice des Snapshots sont considérées<sup>6</sup> comme linéairement indépendants, alors le rang de la matrice  $A$  est maximal.

La solution du problème de minimisation (5) est donnée par la Décomposition aux Valeurs Singulières Tronquée (*Truncated Singular Value Decomposition*) à l'ordre  $K$  de la matrice des snapshots  $A$ . Par conséquent, dans la section suivante, nous allons introduire la Décomposition aux Valeurs Singulières, avant de faire le lien explicite entre SVD et Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres à la section (2.3.5).

## 2.3 La Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD)

Pour des raisons de simplicité, et parce que c'est le cas général en mécanique des fluides, nous allons définir la décomposition aux valeurs singulières d'une matrice  $A$  en se limitant au cas où  $A$  est à valeurs réelles. Une extension au cas où  $A$  serait à valeurs complexes est présentée dans Cordier et Bergmann (2002a).

### 2.3.1 Définition

Soit  $A$  une matrice réelle de dimension  $N_x \times N_t$  alors la Décomposition aux Valeurs Singulières de  $A$  est la factorisation (Golub et Van Loan, 1990) :

$$A = U\Sigma V^T, \quad (7)$$

où<sup>7</sup>  $U$  et  $V$  sont des matrices orthogonales<sup>8</sup>, respectivement de dimension  $N_x \times N_x$  et  $N_t \times N_t$  (*i.e.*  $UU^T = I_{N_x}$  et  $VV^T = I_{N_t}$ ) et où  $\Sigma$  est une matrice diagonale de dimension  $N_x \times N_t$  contenant les grandeurs  $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \mathbb{R}$ , appelées valeurs singulières de  $A$  (et de  $A^T$ ), telles que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_p = 0$  où  $p = \min(N_x, N_t)$ . Le rang  $r$  de la matrice  $A$  est égal au nombre de valeurs singulières non nulles que possède la matrice  $A$ . Par ailleurs, les  $r$  premières colonnes respectivement de  $V = (v_1, v_2, \dots, v_{N_t})$  et de  $U = (u_1, u_2, \dots, u_{N_x})$  sont dénommées vecteurs singuliers droit et gauche de  $A$ . Enfin, puisque les valeurs singulières de  $A$  sont rangées en ordre décroissant, l'index  $i$  correspondant est appelé numéro d'ordre de valeurs singulières.

Le calcul direct des valeurs singulières  $\sigma_i$  et vecteurs singuliers  $U$  et  $V$  associés est souvent fastidieux, et il est préférable de les déterminer par la résolution de problèmes aux valeurs propres équivalents (§ 2.3.3).

Pour  $N_x < N_t$ , l'équation (7) s'écrit encore

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & \cdots & u_{N_x} \end{pmatrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & \sigma_{N_x} & & & 0 \\ & & & & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{N_x}^T \\ \hline v_{N_x+1}^T \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{N_t}^T \end{pmatrix},$$

alors que pour  $N_x > N_t$  elle devient :

<sup>6</sup>Ce sera, en particulier le cas à la section 2.6.4 pour la méthode des snapshots.

<sup>7</sup>On convient ici et partout ailleurs dans le texte de noter  $A^T$  la matrice transposée de  $A$ .

<sup>8</sup>On rappelle que pour une matrice orthogonale quelconque  $A$ , on vérifie  $A^{-1} = A^T$ .



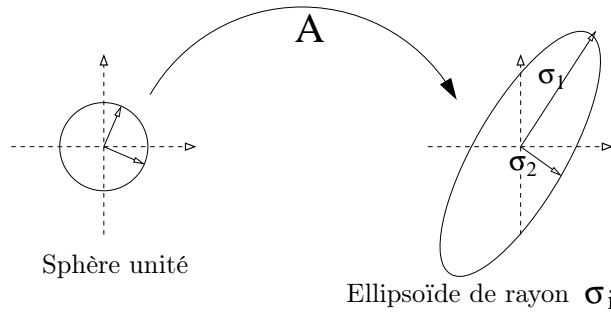


FIGURE 3 – Interprétation géométrique de la SVD d’une matrice  $A$  : image par  $A$  de la sphère unité.

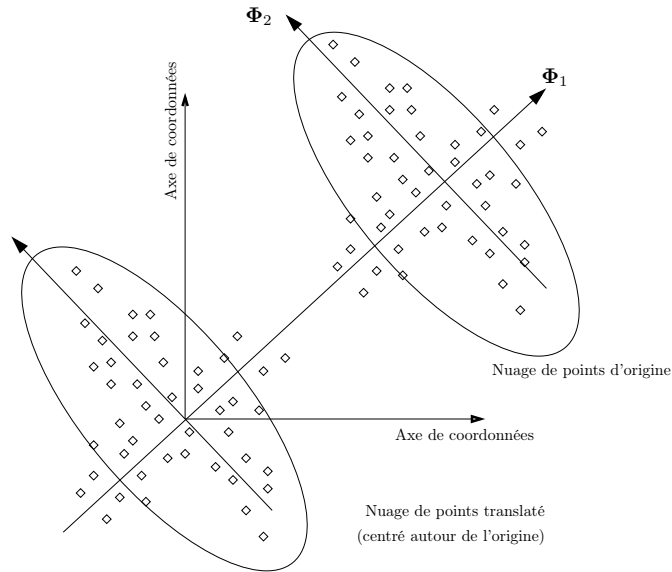


FIGURE 4 – Interprétation géométrique de la SVD d’une matrice  $A$  : rotation de l’espace des phases.

initiales à un nouveau système de coordonnées dont les axes orthogonaux coïncident avec les axes d’inertie des données. Cette formulation de la SVD correspond précisément à la manière utilisée généralement dans la littérature pour introduire l’Analyse en Composantes Principales (Jolliffe, 1986, par exemple).

Quand la Décomposition aux Valeurs Singulières est utilisée pour l’analyse de données, l’algorithme SVD est généralement appliquée à une matrice, obtenue à partir de la matrice  $A$ , par soustraction à chacune des colonnes de sa moyenne. Cette translation de moyenne assure ainsi que le nuage des  $N_x$  points est centré autour de l’origine du système de coordonnées (voir figure 4).

### 2.3.3 Liens entre SVD et problèmes aux valeurs propres

Dans cette section, nous allons proposer une méthode de calcul des valeurs singulières et des vecteurs singuliers gauche et droit d’une matrice rectangulaire  $A$  quelconque. Cette méthode est basée sur la résolution de problèmes aux valeurs propres associés à des matrices carrées  $A^T A$  et  $A A^T$ . Ces matrices peuvent s’interpréter comme une représentation discrète du tenseur des corrélations spatio-temporelles en deux points qui sera introduit à la section 2.5.1.

Soit  $A$ , une matrice rectangulaire de dimension  $N_x \times N_t$ , sa décomposition aux valeurs singulières s’écrit (§ 2.3.1) :

$$A = U \Sigma V^T.$$

Par conséquent, en multipliant les deux membres de cette équation par  $A^T$  à gauche, on obtient une matrice de dimension  $N_t \times N_t$  donnée par :

$$\begin{aligned} A^T A &= V \Sigma U^T U \Sigma V^T \\ &= V \Sigma^2 V^T. \end{aligned} \quad (11)$$

Or, puisque  $A^T A$  est une matrice hermitienne<sup>9</sup>, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et, par conséquent, sa décomposition sur la base propre s'écrit

$$A^T A = W \Lambda W^{-1} = W \Lambda W^T \quad (12)$$

où  $W$  est une matrice orthogonale de dimension  $N_t \times N_t$ . Par ailleurs, on peut montrer aisément<sup>10</sup> que  $A^T A$  est une matrice définie positive.  $A^T A$  est donc hermitienne et définie positive, on est donc assuré que les valeurs propres de la matrice  $A^T A$  sont réelles et supérieures ou égales à zéro. Par comparaison des deux expressions (11) et (12) de  $A^T A$ , on trouve que  $\Sigma^2 = \Lambda$  et  $W = V$ . En d'autres termes,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  et  $(V, \Lambda)$  représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice  $A^T A$ .

En appliquant une démarche similaire à la matrice  $AA^T$ , on trouve successivement  $AA^T = U \Sigma V^T V \Sigma U^T = U \Sigma^2 U^T = W \Lambda W^T$  ce qui nous permet de conclure que  $(U, \Lambda)$  représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice  $AA^T$ .

A ce stade, on constate que lorsque  $N_t \ll N_x$ , la résolution du problème aux valeurs propres lié à la matrice  $A^T A$  (de dimension  $N_t \times N_t$ ) est bien moins coûteux numériquement que la résolution du problème équivalent pour la matrice  $AA^T$  (de dimension  $N_x \times N_x$ ). Cette remarque explique qu'il existe en pratique deux approches différentes pour la POD. On montrera plus tard que la matrice  $A^T A$  est liée à la *méthode des snapshots* (§ 2.6.4) alors que la matrice  $AA^T$  est liée à la *méthode classique* (§ 2.6.3). Cela explique que la méthode classique est utilisée de préférence lorsque  $N_t \gg N_x$ .

On voit que dans le cas où  $N_t \ll N_x$ , cette méthode de calcul est bien plus légère que le calcul direct de la SVD de  $A$ . L'application de cette méthode dans le contexte de la POD est appelée *méthode des snapshots* (§2.6.4).

### 2.3.4 Approximation de rang minimum de $A$

Soit  $A \in \mathbb{R}^{N_x \times N_t}$  une matrice, déterminer une matrice  $X$  de même taille que  $A$  mais de rang  $k$  inférieur et qui soit telle qu'une certaine norme de l'erreur  $A - X$  soit minimale, est un problème classique. Ce problème peut être résolu explicitement pour toute norme unitaire invariante. Pour la norme de Frobenius par exemple<sup>11</sup>, la solution de ce problème est donnée par le théorème d'Eckart-Young (Higham, 1989), soit :

$$\min_{\text{rang}(X) \leq k} \|A - X\|_F = \|A - A_k\|_F = \left( \sum_{j=k+1}^r \sigma_j^2(A) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

où

$$A_k = U \begin{pmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_k u_k v_k^T$$

avec  $\Sigma_k$ , matrice obtenue à partir de  $\Sigma$ , en conservant les  $k$  premières lignes.

Ce théorème établit une relation entre le rang  $k$  de l'approximation  $X$  de  $A$  et la valeur singulière de numéro d'ordre  $(k + 1)$  de  $A$ . Par conséquent, si les valeurs singulières décroissent suffisamment rapidement alors nous pouvons espérer déterminer une approximation de  $A$  possédant un rang très faible. Le lecteur trouvera une application de ce résultat à la compression d'images à la section 2.4.

<sup>9</sup>Ici simplement symétrique car la matrice  $A$  est considérée à valeurs réelles.

<sup>10</sup> $\forall \mathbf{x}, (A^T A \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (A \mathbf{x}, A \mathbf{x}) = \|A \mathbf{x}\|^2 \geq 0$ .

<sup>11</sup>En effet, la norme 2 peut également être utilisée. Dans ce cas, le théorème d'Eckart-Young (13) s'écrit (Hubert *et al.*, 2000) :

$$\min_{\text{rank}(X) \leq k} \|A - X\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}(A) .$$

### 2.3.5 Liens entre POD et SVD

Dans cette section, nous discutons des liens existants entre la POD et la SVD. Notre présentation suit le point de vue de Fahl (2000), mais un traitement similaire pourra être également trouvé dans Atwell et King (1999). Enfin, le lecteur pourra se reporter à Volkwein (1999) pour les démonstrations mathématiques.

On considère ici que les réalisations  $u$ , éléments de l'ensemble  $\mathcal{U}$  introduit à la section 2.2, sont obtenues à l'aide d'une simulation numérique par éléments finis. Par conséquent, toute fonction  $u$  peut se décomposer sur la base éléments finis  $\{\varphi^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^n$  d'ordre  $n$ , sous la forme :

$$u(\mathbf{x}, t_i) = u^n(\mathbf{x}, t_i) = \sum_{j=1}^n u^{(j)}(t_i) \varphi^{(j)}(\mathbf{x}),$$

où la notation  $u^n$  correspond à une solution discrétisée par éléments finis.

Le produit scalaire de deux fonctions  $u$  et  $v$  peut alors être évalué de manière discrète par la relation :

$$(u, v)_{\mathcal{M}} = \mathbf{u}^T \mathcal{M} \mathbf{v} \quad (14)$$

où  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice de masse éléments finis et où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , éléments de  $\mathbb{R}^n$ , sont les vecteurs constitués par les coefficients de  $u$  et  $v$ , écrits dans la base éléments finis, pour  $t = t_i$ . À l'aide d'une factorisation de Cholesky  $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^T$ , la norme associée au produit scalaire discret, défini par l'équation (14), peut se réécrire sous la forme d'une norme associée au produit scalaire canonique sur  $L^2$ , soit :

$$\|u\|_{\mathcal{M}} = (u, u)_{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} = \|(\mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^T \mathbf{u}\|_2.$$

Le problème de minimisation (5) peut alors être reformulé en terme de la norme discrète construite sur le produit scalaire (14). On obtient pour nouveau problème de minimisation :

$$\min \sum_{i=1}^{N_t} \|u^n(\mathbf{x}, t_i) - \sum_{k=1}^K (u^n(\mathbf{x}, t_i), \Phi_k(\mathbf{x}))_{\mathcal{M}} \Phi_k(\mathbf{x})\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (15)$$

où la base de fonctions propres POD  $\{\Phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^K$  est supposée appartenir à l'espace vectoriel engendré par les fonctions de base éléments finis  $\{\varphi^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^n$ , *i.e.* :

$$\Phi_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \Phi_k^j \varphi^{(j)}(\mathbf{x}).$$

Afin de reformuler le problème d'approximation (15) dans le contexte d'un problème d'approximation matricielle (et de pouvoir ainsi utiliser le théorème d'Eckart-Young introduit à la § 2.3.4), nous collectons dans une matrice réelle  $\Phi$  de dimension  $n \times K$ , les coefficients des fonctions propres POD inconnues  $\{\Phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^K$  écrites sur la base éléments finis. Puisque<sup>12</sup> pour toute matrice  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times N_t}$ ,  $\sum_{i=1}^{N_t} \|\tilde{A}_{\cdot, i}\|_2^2 = \|\tilde{A}\|_F^2$ , où  $\|\cdot\|_F$  représente la norme de Frobenius définie à la section A, le problème de minimisation (15) est équivalent au problème de minimisation contraint suivant :

$$\min_{Z \in \mathbb{R}^{n \times K}} \|\tilde{A} - ZZ^T \tilde{A}\|_F^2 \quad \text{sous les contraintes} \quad Z^T Z = I_K \quad (16)$$

avec  $\tilde{A} = (\mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^T A$  et  $Z = (\mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^T \Phi$ , éléments de  $\mathbb{R}^{n \times K}$ .

L'équation (16) indique que l'on cherche un sous-espace de dimension  $K$  tel que  $X = ZZ^T \tilde{A}$  soit la meilleure approximation de  $\tilde{A}$  de tous les sous-espaces de dimension  $K$ . D'après le théorème d'Eckart-Young énoncé à la section 2.3.4, la solution du problème d'approximation (16) est donnée par une décomposition en valeurs singulières de  $\tilde{A}$  tronquée à l'ordre  $K$  :

$$\tilde{A}_K = U_K \Sigma_K V_K^T$$

où  $U_K$  et  $V_K$  correspondent respectivement aux  $K$  premières colonnes de  $U$  et de  $V$ .

<sup>12</sup> $A_{\cdot, i}$  représente ici la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A$ .

Finalement, en comparant l'expression de  $\tilde{A}_K$  et la forme de  $X$ , nous trouvons que la matrice  $\Phi$  est solution du système linéaire suivant :

$$(\mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^T \Phi = U_K \in \mathbb{R}^{n \times K}.$$

Dans cette expression, les vecteurs singuliers gauche  $U$  de  $\tilde{A} = U\Sigma V^T$  peuvent être obtenus directement comme les vecteurs propres de la matrice  $\tilde{A}\tilde{A}^T$  (§ 2.3.3). Cependant, comme on l'a déjà fait remarquer précédemment, il est préférable, lorsque la valeur de  $N_t$  est beaucoup plus petite que celle de  $n$ , d'évaluer les vecteurs propres de la matrice  $\tilde{A}^T\tilde{A}$ . Dans ce cas, les vecteurs singuliers droit  $V$  sont d'abord déterminés, puis on en déduit les vecteurs singuliers gauche  $U$  à l'aide de la relation  $U = \Sigma^{-1}\tilde{A}V$ .

A titre de remarque, on peut mentionner que ces problèmes aux valeurs propres peuvent être résolus à l'aide de la librairie LAPACK<sup>13</sup> ou en utilisant des algorithmes dédiés qui reposent essentiellement sur les méthodes itératives de Lanczos (lire Fahl, 2000, pour un exemple d'algorithme).

## 2.4 Exemple de compression d'images par SVD

Afin d'illustrer l'approximation par SVD d'une matrice quelconque par une matrice de rang inférieur telle que cela a été discuté à la section 2.3.4, nous allons considérer des problèmes indépendants du temps pour lesquels les données correspondent à des images en niveaux de gris. Sur les figures 7(a) et 8(a), nous avons représenté les images "clown" et "trees" issus de Matlab. Ces images peuvent être représentées par des matrices de dimension respective  $200 \times 330$  et  $128 \times 128$ , chaque pixel contenant une valeur comprise entre 0 (blanc) et 1 (noir) pour 64 niveaux de gris. Chacune de ces matrices est de rang maximal, soit 200 et 128 respectivement. Les valeurs singulières de chacune de ces images sont représentées sur la figure 5 en échelle semi-logarithmique. On constate que les valeurs singulières de ces deux images décroissent très rapidement, ce qui permet de penser que des approximations précises de rang inférieur sont possibles.

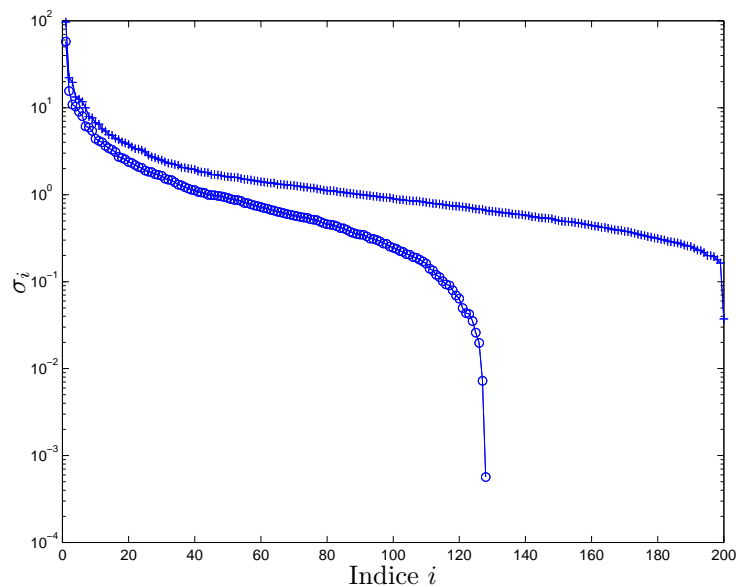


FIGURE 5 – Valeurs singulières de l'image "clown" (+) et de l'image "trees" (o).

En comparant la décroissance du spectre de valeurs singulières pour les deux images, on trouve que l'erreur relative pour des approximations de même rang est supérieure pour l'image "clown" par rapport à l'image "trees". On en conclut donc que l'image "trees" est plus facile à approximer que l'image "clown".

<sup>13</sup><http://www.netlib.org/lapack/>

D'après le théorème d'Eckart-Young (voir §2.3.4), toute matrice  $A$  de rang  $r$  peut être approximée par une autre matrice de rang  $k \leq r$  donnée par la relation :

$$\hat{A} = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T,$$

et telle que

$$\|A - \hat{A}\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Par conséquent, par SVD, il est possible d'obtenir un modèle fidèle (éventuellement de rang faible) d'une matrice quelconque, à condition que le spectre des valeurs singulières de cette matrice décroisse suffisamment vite. En effet, on peut alors choisir un indice de coupure  $M \ll r$  et construire une approximation de  $A$  sur un nombre réduit de modes. Afin de préciser cette idée, on peut définir le *contenu informationnel relatif* de la décomposition en valeurs singulières de  $A$  par :

$$\text{RIC}(M) = \frac{\sum_{i=1}^M \sigma_i}{\sum_{i=1}^r \sigma_i}. \quad (17)$$

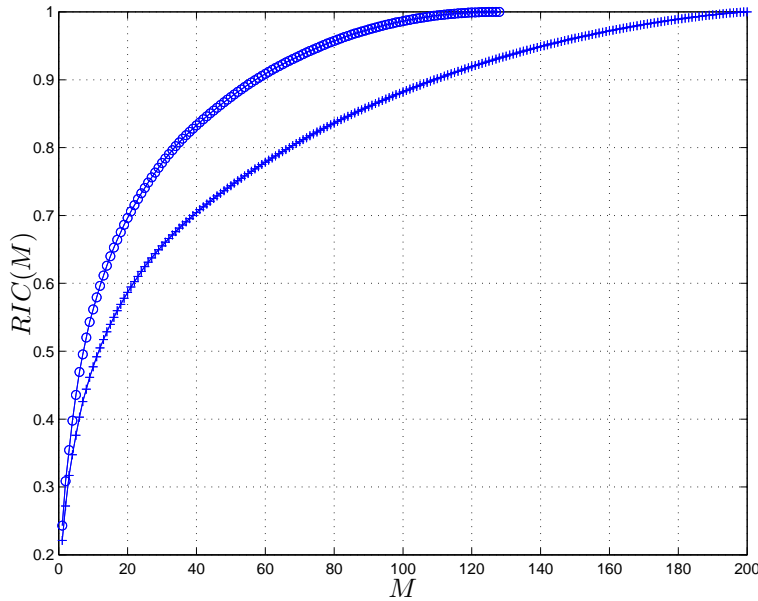


FIGURE 6 – Relative information content for the “clown” image (+) and the “trees” image (o).

Si l'on impose à l'approximation construite par SVD de contenir  $\delta\%$  de l'information contenue dans l'image d'origine, la dimension  $M$  du sous-espace  $D_M^{SVD}$  engendré par les  $M$  premiers modes singuliers est déterminée par la relation :

$$M = \text{argmin}\{\text{RIC}(M); \text{RIC}(M) \geq \delta\}. \quad (18)$$

Sur la figure 6, nous avons représenté le contenu informationnel relatif pour les images "clown" et "trees". Naturellement, nous retrouvons le résultat énoncé précédemment lorsque le spectre des valeurs singulières était discuté, à savoir que l'image "trees" est plus facile à approximer par une image de rang inférieur que l'image "clown". En effet, pour un nombre donné de modes singuliers, par exemple  $M = 20$ , respectivement 60 % et 70 % du contenu informationnel relatif sont contenus dans les approximations correspondantes des images "clown" et "trees".

Finalement, nous comparons sur les figures 7 et 8, les images originales "clown" et "trees" avec leurs approximations de rang 6, 12 et 20 obtenus par SVD tronqué.

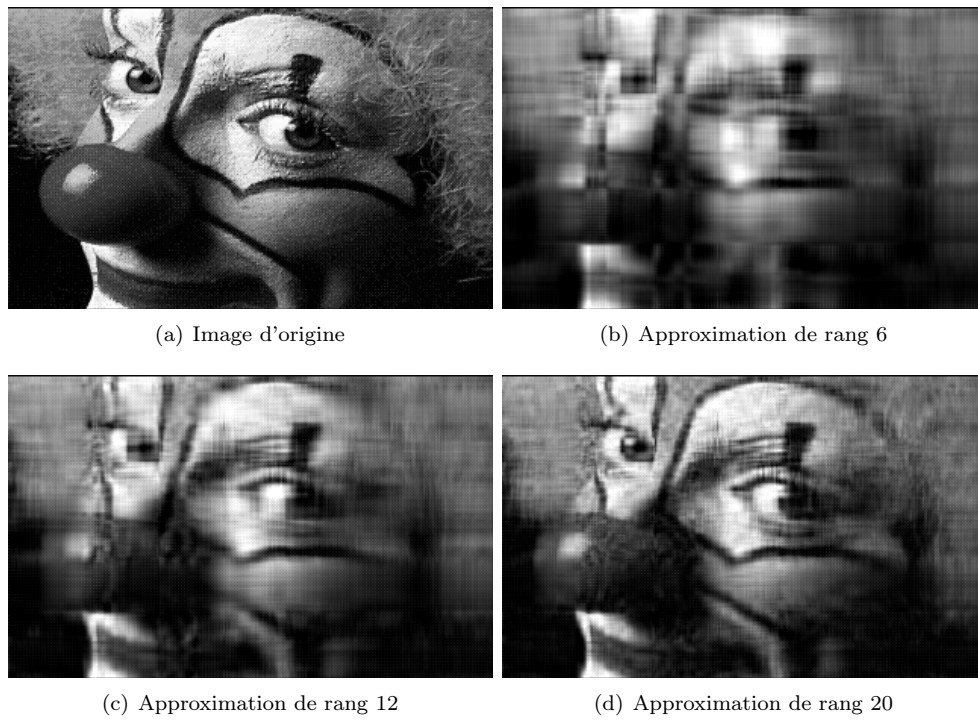


FIGURE 7 – Approximations de l'image "clown" de MatLab par des images de rang inférieur.

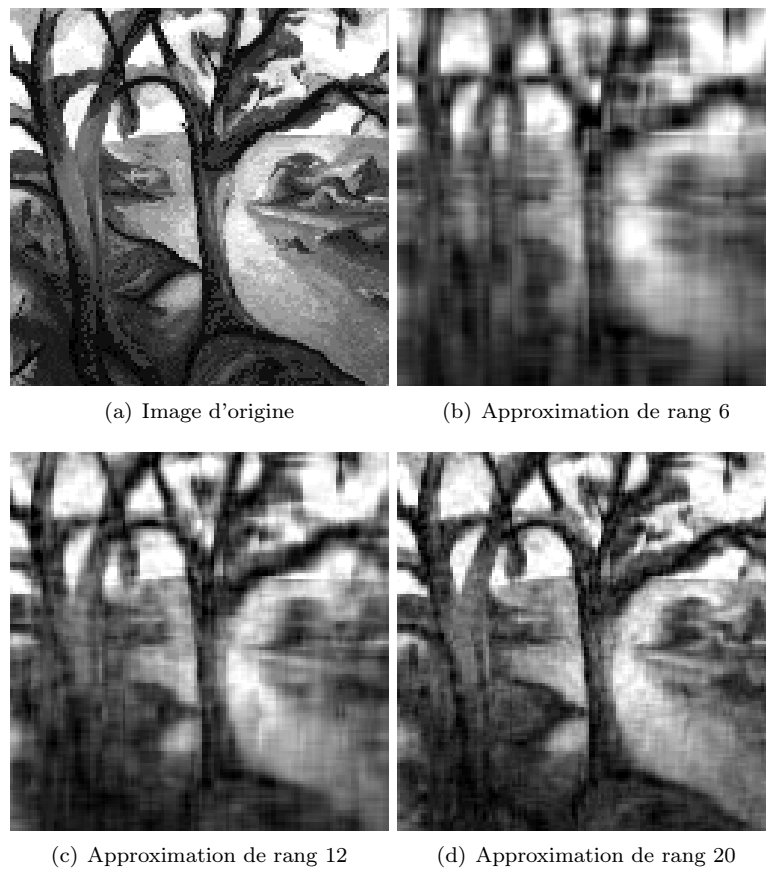


FIGURE 8 – Approximations de l'image "trees" de MatLab par des images de rang inférieur.



## 2.5 La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)

Dans cette section, la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres est introduite dans l'esprit de Holmes *et al.* (1996) comme une méthode pouvant conduire à une meilleure compréhension des écoulements turbulents. Jusqu'ici la POD a été présentée uniquement comme une technique performante de post-traitement permettant, selon le point de vue retenu, d'extraire sans empirisme les structures cohérentes d'un écoulement, ou de réaliser une compression des informations contenues dans des données provenant de simulations numériques ou d'expériences. Par la suite, nous allons considérer que la POD permet également de fournir des fonctions de base qui peuvent être utilisées pour définir un sous-espace de faible dimension sur lequel on pourra projeter les équations d'état. Cette idée a été pour la première fois appliquée par Aubry *et al.* (1988) pour modéliser la zone de proche paroi d'une couche limite et plus récemment par Ukeiley *et al.* (2001) pour étudier la dynamique des structures cohérentes dans une couche de mélange plane.

### 2.5.1 L'équation de Fredholm

Soit  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t_n)$  une variable spatio-temporelle, considérons  $\{\mathbf{u}(\mathbf{X})\}$  un ensemble d'observations, encore appelées snapshots, obtenus en  $N_t$  instants différents  $t_n$  sur un domaine spatial noté  $\Omega$ . Par la suite, pour simplifier les notations, on considérera que  $\mathbf{X} \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+$ . Selon le cas, ces observations seront des données expérimentales ou numériques correspondant à des champs de vitesse, de vorticité, de température, ... Par ailleurs, rien n'oblige *a priori* que les caractéristiques physiques du système ou les paramètres de contrôle (nombre de Reynolds, par exemple) soient les mêmes pour toutes les observations de la base de données (Christensen *et al.*, 1998). Le problème à résoudre consiste donc à extraire de ces champs considérés comme aléatoires, un mode dominant ou encore structure cohérente. D'après Lumley (1967), une structure cohérente correspond à la fonction déterministe la mieux corrélée en moyenne aux réalisations  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ . En d'autres termes, nous recherchons une fonction  $\Phi$  qui possède, au sens des moindres carrés, la plus grande projection sur les observations *i.e.* qui maximise la quantité  $|\langle \mathbf{u}, \psi \rangle|^2$ . Or, puisque nous cherchons uniquement à tester le parallélisme des fonctions  $\Phi$  avec les observations, la dépendance de l'amplitude de  $\Phi$  doit être supprimée. Une manière de le faire est de normaliser à 1, l'amplitude des fonctions  $\Phi$ . Par conséquent, il est naturel de s'intéresser à un espace de fonctions  $\Phi$  pour lequel le produit scalaire existe. Un choix naturel est donc d'imposer à  $\Phi$  d'appartenir à l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\mathcal{D}$ , soit  $L^2(\mathcal{D})$ . Finalement, dans le but d'introduire les statistiques relatives à l'ensemble des observations, nous allons chercher à maximiser l'expression :

$$\frac{\langle |\mathbf{u}, \Phi|^2 \rangle}{\|\Phi\|^2}$$

sous une certaine moyenne (temporelle, spatiale, moyenne de phase, ...) notée ici  $\langle \cdot \rangle$  et que l'on précisera au cas par cas. Le choix de l'opérateur de moyenne est au cœur des différentes approches de la POD. Ce point sera discuté de manière détaillée à la section 2.6.

Par conséquent, d'un point de vue mathématique, la fonction  $\Phi$  correspond à la solution du problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\max_{\psi \in L^2(\mathcal{D})} \frac{\langle |\mathbf{u}, \psi|^2 \rangle}{\|\psi\|^2} = \frac{\langle |\mathbf{u}, \Phi|^2 \rangle}{\|\Phi\|^2} \quad (19)$$

avec

$$(\Phi, \Phi) = \|\Phi\|^2 = 1,$$

où<sup>14</sup>  $(\cdot, \cdot)$  et  $\|\cdot\|$  représentent respectivement le produit scalaire canonique sur  $L^2$  et la norme associée.

Nous allons montrer maintenant que le problème de maximisation (19) peut se reformuler sous la forme d'un problème aux valeurs propres. Pour cela, nous introduisons l'opérateur  $\mathcal{R} : L^2(\mathcal{D}) \rightarrow L^2(\mathcal{D})$  défini par :

$$\mathcal{R}\Phi(\mathbf{X}) = \int_{\mathcal{D}} R(\mathbf{X}, \mathbf{X}')\Phi(\mathbf{X}')d\mathbf{X}'$$

où  $R(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \langle \mathbf{u}(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{u}^*(\mathbf{X}') \rangle$  est le tenseur<sup>15</sup> des corrélations spatio-temporelles en deux points.

<sup>14</sup>En mécanique des fluides, on choisit généralement la norme sur  $L^2$  car elle correspond à des écoulements d'énergie cinétique finie. Cependant, on verra à la section 2.6.2 que d'autres normes peuvent être utilisées.

<sup>15</sup>Ici, nous nous plaçons délibérément dans le cas général où  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  est éventuellement à valeurs complexes. Par conséquent,  $\mathbf{u}^*$  correspond ici au conjugué du champ de vitesse  $\mathbf{u}$ .

A condition de supposer que l'on peut permuter les opérations de moyenne et d'intégration, on obtient de manière évidente :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\Phi, \Phi) &= \left( \int_{\mathcal{D}} \langle \mathbf{u}(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{u}^*(\mathbf{X}') \rangle \Phi(\mathbf{X}') d\mathbf{X}', \Phi(\mathbf{X}) \right) \\
&= \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \langle \mathbf{u}(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{u}^*(\mathbf{X}') \rangle \Phi(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' \cdot \Phi^*(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\
&= \left\langle \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}(\mathbf{X}) \cdot \Phi^*(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}^*(\mathbf{X}') \cdot \Phi(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' \right\rangle \\
&= \langle |\langle \mathbf{u}, \Phi \rangle|^2 \rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

En pratiquant de la même manière, on peut montrer également que

$$(\mathcal{R}\Phi, \Psi) = (\Phi, \mathcal{R}\Psi) \text{ quelles que soient } (\Phi, \Psi) \in [L^2(\mathcal{D})]^2.$$

On en déduit alors que  $\mathcal{R}$  est un opérateur linéaire, auto-adjoint<sup>16</sup> et positif<sup>17</sup> sur  $L^2(\mathcal{D})$ . Par conséquent, la théorie spectrale s'applique (Riesz et Nagy, 1955; Courant et Hilbert, 1953) et garantit que le problème de maximisation (19) admet une solution égale à la plus grande valeur propre du problème

$$\mathcal{R}\Phi = \lambda\Phi \quad (20)$$

que l'on peut reformuler comme une équation intégrale de Fredholm, soit :

$$\sum_{j=1}^{n_c} R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \Phi^j(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda \Phi^i(\mathbf{X}), \quad (21)$$

où  $n_c$  est le nombre de composantes de  $\mathbf{u}$ .

Les propriétés des fonctions propres  $\Phi_i(\mathbf{X})$  obtenues comme solutions de l'équation de Fredholm (21) seront discutées à la section 2.5.2. Ici, nous allons nous contenter de faire quelques remarques qui vont éclairer les contraintes liées à la POD.

Dans l'équation (21), l'intégrale  $\int_{\mathcal{D}} \cdot d\mathbf{X}'$  est définie sur tout le domaine  $\mathcal{D}$  considéré. Par conséquent, le tenseur des corrélations en deux points  $R_{ij}$  devra être connu sur tout le domaine  $\mathcal{D}$ . Le volume de données correspondant peut alors devenir rapidement très conséquent (plusieurs giga octets ne sont pas rares) et il est alors nécessaire de faire appel à une procédure de compression de données pour réduire la taille du stockage (Cordier et Bergmann, 2002b, par exemple). Cela explique en grande partie qu'il a fallu attendre les développements importants des méthodes numériques et expérimentales qui se sont produits au début des années 90 pour voir un renouveau de l'utilisation de la POD.

A titre de remarque, on peut constater que le problème de maximisation (19) revient encore à maximiser le quotient de Rayleigh défini par  $r(\Phi) = \frac{(\mathcal{R}\Phi, \Phi)}{\|\Phi\|^2}$  sous la contrainte que  $\|\Phi\|^2 = 1$ . Une condition nécessaire pour la solution est que le gradient du quotient de Rayleigh soit nul. Or, le gradient du quotient de Rayleigh se calcule de la manière suivante :

$$\nabla r(\Phi) = \frac{2}{\Phi^T \Phi} [\mathcal{R}\Phi - r(\Phi)\Phi],$$

et annuler celui-ci revient à imposer la condition :

$$\mathcal{R}\Phi = r(\Phi)\Phi.$$

Le quotient de Rayleigh  $r(\Phi)$  correspond donc à la valeur propre de l'opérateur  $\mathcal{R}$  associée au vecteur propre  $\Phi$ . On retrouve ainsi le problème aux valeurs propres (20).

<sup>16</sup>i.e.  $\mathcal{R}^\dagger = \mathcal{R}$  où l'adjoint de  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}^\dagger$  est défini par la relation :

$$(\mathcal{R}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{R}^\dagger \mathbf{v}) \text{ quelles que soient } \mathbf{u} \in L^2(\mathcal{D}) \text{ et } \mathbf{v} \in L^2(\mathcal{D}).$$

<sup>17</sup>i.e.  $(\mathcal{R}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$  quelle que soit  $\mathbf{u} \in L^2(\mathcal{D})$ .

### 2.5.2 Propriétés des fonctions de bases POD

A l'exception de l'optimalité de la POD qui est discutée à la section 2.5.3, les propriétés principales des fonctions propres POD sont successivement présentées ici.

1. Dans un domaine d'intégration borné, la théorie de Hilbert-Schmidt (Riesz et Nagy, 1955) s'applique et assure l'existence d'une infinité dénombrable de solutions au problème (21). L'équation de Fredholm possède donc un ensemble discret de solutions satisfaisant

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \Phi_n^j(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda_n \Phi_n^i(\mathbf{X}) \quad (22)$$

où  $\lambda_n$  et  $\Phi_n^i$  représentent respectivement les valeurs propres et les fonctions propres POD d'ordre  $n = 1, 2, 3, \dots, +\infty$ . Chaque nouvelle fonction propre est déterminée comme solution du problème de maximisation (19) en imposant comme contrainte supplémentaire d'être orthogonale à toutes les fonctions propres trouvées précédemment. Ainsi, par construction, les fonctions propres sont orthogonales mais, pour des raisons pratiques, elles sont généralement choisies comme orthonormales (voir propriété 4).

2. L'opérateur  $\mathcal{R}$  étant auto-adjoint et positif, toutes ses valeurs propres sont réelles et positives. Quitte à les renuméroter, on peut toujours les indexer par ordre décroissant :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{+\infty} \geq 0.$$

Par ailleurs, ces valeurs propres forment une série convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n < +\infty.$$

3. Les fonctions propres POD formant une base complète, toute réalisation  $\mathbf{u}$  pourra être reconstruite sur cette base :

$$u_i(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Phi_n^i(\mathbf{X}).$$

4. Par construction, les fonctions propres POD  $\Phi_n$  sont orthogonales deux à deux. Toutefois, il est toujours possible de leur imposer d'être orthonormales<sup>18</sup> et de vérifier :

$$\sum_{i=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}} \Phi_m^i(\mathbf{X}) \Phi_n^{i*}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \delta_{mn}. \quad (24)$$

5. Les coefficients de projection de  $\mathbf{u}$  sur  $\Phi$ ,  $a_n$ , peuvent alors être évalués en utilisant l'orthonormalité des fonctions propres  $\Phi$ .

$$a_n = (\mathbf{u}, \Phi) = \sum_{i=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}} u_i(\mathbf{X}) \Phi_n^{i*}(\mathbf{X}) d\mathbf{X}.$$

6. La matrice des corrélations spatio-temporelle en deux points  $R_{ij}$  peut se décomposer en une série convergente et uniforme (Courant et Hilbert, 1953) :

$$R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \Phi_n^i(\mathbf{X}) \Phi_n^{j*}(\mathbf{X}').$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Mercer.

<sup>18</sup>Les fonctions propres POD étant déterminées à une constante multiplicative prêt, il est équivalent d'imposer

$$\sum_{i=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}} \Phi_m^i(\mathbf{X}) \Phi_n^{i*}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \lambda_m \delta_{mn} \quad (23)$$

pour les fonctions propres  $\Phi_m^i(\mathbf{X})$  et la condition  $\langle a_n a_m^* \rangle = \delta_{mn}$  pour les coefficients de projection  $a_n$  ou d'imposer pour les fonctions propres la condition d'orthonormalité (24) et la condition d'orthogonalité (25) pour les coefficients de projection. Pour des raisons numériques, il est plus simple d'imposer la condition (24) pour la POD classique, et la condition (23) pour la méthode des snapshots (Rempfer et Fasel, 1994, par exemple).

7. Le théorème de Mercer, combiné avec la représentation de  $\mathbf{u}$  sur la base POD  $\Phi$ , et en tenant compte de l'orthonormalité des fonctions propres POD permet de montrer que les coefficients de projection  $a_n$  sont non corrélés entre eux et que leur moyenne quadratique est égale aux valeurs propres de la POD.

$$\langle a_n a_m^* \rangle = \delta_{mn} \lambda_n. \quad (25)$$

La démonstration de cette relation peut être trouvée dans Cordier et Bergmann (2002a, page 22).

8. Finalement, le théorème de Mercer et l'orthonormalité des fonctions propres POD conduisent à :

$$\sum_{i=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}} R_{ii}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) d\mathbf{X} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = E \quad (26)$$

Si les réalisations  $\mathbf{u}$  représentent des champs de vitesse alors  $E$  correspond à l'énergie cinétique turbulente intégrée sur tout le domaine  $\mathcal{D}$ . Chaque structure d'ordre ( $n$ ) contribue donc de manière indépendante à l'énergie cinétique turbulente. L'amplitude des valeurs propres  $\lambda_n$  mesure l'importance relative des différents modes POD pour la représentation de l'écoulement.

### 2.5.3 Optimalité de la base POD

Soient  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  une fonction telle que  $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{D})$  et  $\mathbf{u}^a$  une approximation de  $\mathbf{u}$ , nous pouvons écrire sur une base orthonormale quelconque  $\Psi_n(\mathbf{X})$ ,  $n = 1, 2, \dots, +\infty$  :

$$u_i^a(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \Psi_n^i(\mathbf{X}).$$

Par ailleurs, soient  $\{\Phi_1(\mathbf{X}), \Phi_2(\mathbf{X}), \dots, \Phi_\infty(\mathbf{X})\}$ , un ensemble de fonctions propres POD orthonormales et  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\infty\}$  les valeurs propres associées, nous pouvons également considérer l'approximation  $u_i^P(\mathbf{X})$  de  $\mathbf{u}$  sur la base POD :

$$u_i^P(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Phi_n^i(\mathbf{X}).$$

Les équations (26) et (25) indiquent clairement que si les vecteurs de la base  $\Psi_n^i(\mathbf{X})$  sont non dimensionnés alors l'expression  $\langle b_n b_n^* \rangle$  représente l'énergie cinétique moyenne comprise dans le  $n^{\text{ième}}$  mode. Le lemme suivant, dont on peut trouver la preuve à la page 23 de Cordier et Bergmann (2002b), établit alors l'optimalité de l'approche POD.

**Lemme** Quelle que soit la valeur de  $N$ , nous avons le résultat suivant :

$$\sum_{n=1}^N \langle a_n a_n^* \rangle = \sum_{n=1}^N \lambda_n \geq \sum_{n=1}^N \langle b_n b_n^* \rangle.$$

Par conséquent, parmi toutes les décompositions linéaires, la POD est la plus efficace dans le sens où, pour un nombre donné de modes POD  $N$ , la projection sur le sous-espace engendré par les  $N$  premières fonctions propres POD contient en moyenne la plus grande quantité d'énergie cinétique possible.

### 2.5.4 Discussion sur la précision du modèle POD

La base POD étant optimale d'un point de vue énergétique, cela suggère qu'un petit nombre de modes noté  $M$  peut être suffisant pour obtenir une *bonne* représentation de n'importe quelle réalisation  $\mathbf{u}$ . Il reste alors à définir un critère mathématique permettant de qualifier quantitativement la notion qualitative évoquée plus haut.

Soit  $N_{POD}$ , le nombre de modes POD obtenus par résolution de l'équation de Fredholm (21), l'erreur de troncature, commise en ne retenant que les  $M$  premiers modes POD pour représenter une réalisation  $\mathbf{u}$ , est donnée par :

$$\begin{aligned} \epsilon(M) &= \left\| \mathbf{u}(\mathbf{X}) - \sum_{n=1}^M (\mathbf{u}(\mathbf{X}), \Phi_n(\mathbf{X})) \Phi_n(\mathbf{X}) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=M+1}^{N_{POD}} (\mathbf{u}(\mathbf{X}), \Phi_n(\mathbf{X})) \Phi_n(\mathbf{X}) \right\|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Pour déterminer la valeur de  $M$ , un critère possible est de minimiser l'erreur (27). Cependant, en pratique, ce critère n'est jamais utilisé et la détermination de  $M$  est plutôt basée sur des considérations heuristiques. En effet, l'équation (26) indique que  $\sum_{n=1}^M \lambda_n$  correspond à l'énergie moyenne contenue dans les  $M$  premiers modes de la POD. Par conséquent, pour capturer la majorité de l'énergie contenue dans les  $N_{POD}$  modes de la POD, il suffit de choisir  $M$  tel que  $\sum_{n=1}^M \lambda_n \simeq \sum_{n=1}^{N_{POD}} \lambda_n$ . Par définition, le rapport  $\sum_{n=1}^M \lambda_n / \sum_{n=1}^{N_{POD}} \lambda_n$  est le pourcentage de l'énergie cinétique totale représentée par les  $N_{POD}$  modes POD à être contenu dans les  $M$  premiers modes de la POD. Pour un pourcentage d'énergie prédéfini  $P_\epsilon$ , la dimension  $M$  du sous-espace engendré par les  $M$  premières fonctions propres POD peut être déterminée telle que la condition

$$\frac{\sum_{n=1}^M \lambda_n}{\sum_{n=1}^{N_{POD}} \lambda_n} = \frac{E(M)}{E(N_{POD})} \geq P_\epsilon \quad (28)$$

soit vérifiée (Ravindran, 2000b; Fahl, 2000; Cordier et Bergmann, 2002b; Bergmann *et al.*, 2005). Finalement, le sous-espace POD contenant un pourcentage d'énergie cinétique turbulente supérieur à  $P_\epsilon\%$  de l'énergie du système initial correspond à  $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_M\}$ .

Jusqu'ici, seul l'aspect réduction de modèle associé à l'approximation d'une réalisation quelconque par les fonctions propres POD a été évoqué. Or, l'optimalité énergétique de la POD suggère également qu'un tout petit nombre de modes POD devrait suffire pour décrire la dynamique du système. Par conséquent, il semble raisonnable d'espérer construire, à partir d'une base de données issue de simulations numériques ou d'expériences, un système dynamique d'ordre faible par projection de Galerkin des équations d'état sur les modes POD. Bien qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de preuve de l'optimalité de la base POD en terme de modélisation de la dynamique, cette approche a d'ores et déjà été utilisée avec succès, que ce soit en turbulence (Aubry *et al.*, 1988; Ukeiley *et al.*, 2001) ou pour des applications du contrôle optimal au contrôle d'écoulement (Ravindran, 1999, 2000a,b; Afanasiev et Hinze, 2001). Cette dernière application constituant le point central des travaux réalisés dans notre groupe, le lecteur pourra trouver une discussion plus complète dans Bergmann *et al.* (2005); Bergmann et Cordier (2006).

## 2.6 Les différentes approches

A la section 2.5, la POD a été introduite dans un contexte très général. En effet, seul le produit scalaire avait été précisé<sup>19</sup> et des questions aussi fondamentales pour la POD que le choix :

- ▷ de la base de données,
- ▷ du produit scalaire,
- ▷ de l'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle$  : moyenne spatiale ou temporelle,
- ▷ de la variable  $\mathbf{X}$  : spatiale  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  ou temporelle  $t$ ,

n'avaient pas été discutées. L'objet de cette section est de mettre en évidence que différents types de décomposition orthogonale peuvent être obtenus en fonction, par exemple, du choix qui va être réalisé pour l'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle$ , utilisé pour évaluer le noyau de l'équation de Fredholm (21). Dans ce qui suit, seules les deux méthodes les plus utilisées en pratique *i.e. la méthode classique* (§ 2.6.3) et *la méthode des snapshots* (§ 2.6.4) seront décrites. Le lecteur pourra se reporter à Aubry *et al.* (1991) pour une présentation de la généralisation de ces deux méthodes : la *décomposition biorthogonale*.

### 2.6.1 Choix des réalisations

Essentiellement, la POD est une méthode de compression d'information. En tant que telle, une base POD est incapable de représenter une information qui n'était pas contenue initialement dans la base de données utilisée pour la déterminer. Le choix des réalisations est donc cruciale, car c'est le seul moyen existant, pour introduire toute l'information qui sera nécessaire pour des applications futures de la base réduite POD (procédure d'optimisation par exemple). Or, jusqu'aux travaux récents<sup>20</sup> de Gunzburger (2004) sur la "meilleure"

<sup>19</sup>Pour mémoire, nous avons alors choisi le produit scalaire canonique sur  $L^2$ . Nous allons justifier ce choix dans la suite de l'exposé.

<sup>20</sup>La méthode proposée par Gunzburger (2004) se nomme *CVOD* pour CVT + POD. Elle constitue à l'heure actuelle, à notre connaissance, la seule approche systématique et rationnelle, permettant de générer de manière "intelligente" les réalisations à utiliser pour construire les modes POD.

manière de retenir les réalisations de la base de données POD, la génération des réalisations constituaient plus un art qu'une vraie science. En particulier, nous sommes incapables d'affirmer que l'excitation ad-hoc utilisée dans Bergmann *et al.* (2005) pour générer des fonctions POD généralisées est la meilleure que l'on ait pu choisir. Seule une justification *a posteriori*, en fonction des résultats obtenus en utilisant ce système réduit dans la boucle d'optimisation, peut être donnée.

De manière générale, l'état d'un système physique complexe, que l'on cherche à modéliser ou à optimiser, dépend de paramètres comme sa géométrie, ses paramètres de contrôle, ses conditions initiales ou aux limites, des coefficients caractéristiques du milieu, ... Supposons maintenant que ces paramètres optimaux, en terme de génération des réalisations de la base POD, soient connus. Généralement, ces réalisations proviennent de simulations numériques ou d'expériences et, par conséquent, elles s'accompagnent d'un certain niveau d'incertitude lié aux bruits de mesure par exemple. Il est donc important d'étudier les effets de ces erreurs, assimilables à des perturbations infinitésimales sur les résultats obtenus par modèle réduit. Cette question fondamentale a récemment été abordée de manière théorique par Rathinam et Petzold (2003). Ces auteurs ont introduit le concept de facteur de sensibilité POD, qui mesure la sensibilité du résultat de la projection sur le sous-espace POD, en fonction des perturbations initiales des données. Malheureusement, ces travaux ont montré que ce facteur de sensibilité était pertinent à prendre en compte dans certaines applications et qu'il ne l'était pas dans d'autres, sans pouvoir réellement conclure.

Une dernière difficulté, liée au choix des réalisations, se traduit par l'instabilité structurelle possible du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les modes POD. En effet, il est maintenant clairement reconnu (Rempfer, 2000; Noack *et al.*, 2003) qu'il est possible de construire des contre-exemples analytiques tels que le système réduit construit par POD ne possède plus les propriétés de stabilité du modèle précis dont il est issu. L'opération de projection dans le sous-espace linéaire POD associée à la projection de Galerkin n'est donc pas transparente en terme de stabilité. Ce phénomène est encore mal compris et de nouveaux travaux s'attachant de manière spécifique à ce problème seraient bénéfiques. Dans cet ordre d'idée, citons Prajna (2003) qui a récemment proposé une condition suffisante pour que le modèle réduit de dynamique POD conserve les propriétés du modèle précis de départ. Cependant, à ce jour, aucune utilisation de ce critère à un problème de mécanique des fluides ou de turbulence n'a été réalisée.

### 2.6.2 Choix du produit scalaire

Pour l'instant, la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres a été décrite dans le contexte du produit scalaire canonique sur  $L^2$ . Ce choix a été fait pour des raisons de simplicité, mais aussi, parce que c'est le cas général pour les applications en mécanique des fluides. Toutefois, comme on va le voir par la suite, il peut être intéressant (pour des propriétés de convergence, en particulier<sup>21</sup>) d'utiliser d'autres types de normes. Ainsi, il sera possible de définir d'autres notions d'optimalité que la vision énergétique considérée jusqu'ici.

**Produit scalaire sur  $L^2$**  Soit  $L^2(\Omega)$ , l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable à valeurs complexes dans  $\Omega$ . Pour des fonctions vectorielles  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , représentatives par exemple de champs de vitesse, le produit scalaire sur  $L^2(\Omega)$  est défini de la manière suivante :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (u_1 v_1^* + u_2 v_2^* + u_3 v_3^*) \, d\mathbf{x}, \quad (29)$$

où  $\|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$  est la norme associée.

L'énergie cinétique associée à l'écoulement est proportionnelle à  $\|\mathbf{u}\|^2$ . Par conséquent,  $L^2$  semble un espace naturel pour les applications à la mécanique des fluides car il correspond aux écoulements d'énergie cinétique finie. Pour cette raison, la norme  $L^2$  est la plus utilisée en pratique pour définir la POD.

**Produit scalaire sur  $H^1$**  L'intérêt d'introduire un produit scalaire sur l'espace de Sobolev<sup>22</sup>  $H^1(\Omega)$  a été mis en évidence par Iollo (1997), qui a montré qu'un modèle réduit de dynamique construit par projection des équations d'Euler sur une base POD pouvait être instable, lorsque le produit scalaire classique sur  $L^2$  avait

<sup>21</sup>Mentionnons comme autre circonstance, le cas des écoulements compressibles étudiés par Rowley (2002) où il est nécessaire d'introduire un produit scalaire particulier pour tenir compte du fait qu'en écoulement compressible, les variables de vitesse  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  et les variables thermodynamiques (densité, pression, enthalpie) sont dynamiquement couplées (voir Cordier et Bergmann, 2002b, page 29).

<sup>22</sup>L'espace  $H^1(\Omega)$  est constitué des fonctions qui appartiennent à  $L^2(\Omega)$  ainsi que leurs dérivées premières.

été utilisé. Iollo *et al.* (1998) proposèrent alors une manière d'améliorer la stabilité numérique des modèles réduits construit par POD, en redéfinissant le produit scalaire utilisé pour introduire la POD comme

$$(u, v)_\epsilon = \int_{\Omega} u v d\mathbf{x} + \epsilon \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) d\mathbf{x}, \quad (30)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre numérique introduit pour tenir compte de différentes métriques. Des expériences numériques ont conclu qu'une formulation en norme  $H^1$  de la POD améliorerait de manière importante le comportement d'un modèle réduit. Bien que l'utilisation de cette norme semble bénéfique pour améliorer la robustesse du modèle réduit de dynamique construit par POD, cette approche a reçu bien peu d'attention dans la littérature.

### 2.6.3 Méthode classique

Cette approche correspond à celle introduite par Lumley (1967). Dans ce cas, la moyenne  $\langle \cdot \rangle$  est temporelle :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T} \int_T \cdot dt$$

et elle est évaluée à l'aide d'une moyenne d'ensemble en invoquant des hypothèses de stationnarité et d'ergodicité. La variable  $\mathbf{X}$ , quant à elle, est assimilée à la variable spatiale  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  définie sur tout le domaine  $\Omega$ .

La figure 9 décrit de manière schématique le principe de la POD classique.

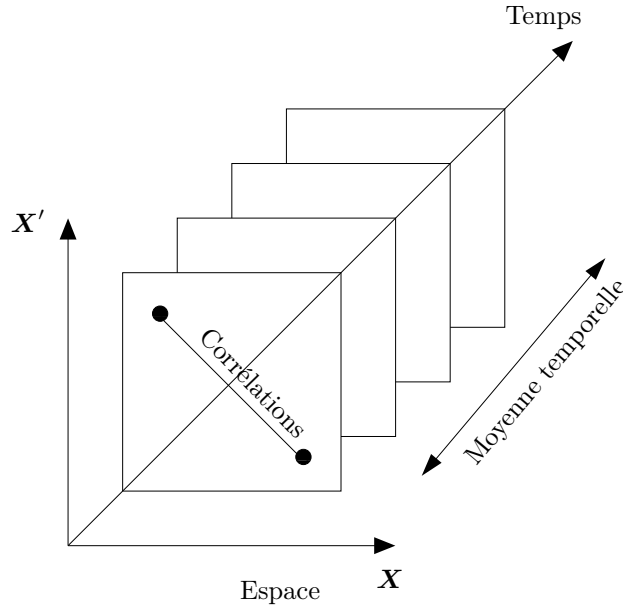


FIGURE 9 – Représentation schématique de la POD classique.

Le problème aux valeurs propres correspondant se déduit facilement de l'équation (22) en remplaçant le domaine d'intégration  $\mathcal{D}$  par  $\Omega$  et la variable  $\mathbf{X}$  par  $\mathbf{x}$ . L'équation intégrale de Fredholm à résoudre est donc :

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int_{\Omega} R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Phi_n^j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda_n \Phi_n^i(\mathbf{x}) \quad (31)$$

où  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  est le tenseur des corrélations spatiales en deux points défini par :

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{T} \int_T u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t) dt = \sum_{n=1}^{N_{POD}} \lambda_n \Phi_n^i(\mathbf{x}) \Phi_n^{j*}(\mathbf{x}')$$

où  $T$  est une période de temps suffisamment longue sur laquelle les réalisations  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  sont connues. Dans cette approche, les fonctions propres sont purement spatiales.

**Discussion sur la taille du problème aux valeurs propres.** Soit  $N_x$  le nombre de points de l'espace où sont connues les réalisations utilisées pour déterminer la base POD et  $n_c$  le nombre de composantes vectorielles de  $\mathbf{u}$  alors  $N_{POD} = N_x \times n_c$ . Si l'on considère que les réalisations contenues dans la base de données utilisée pour résoudre la POD ont été déterminées à partir d'une simulation numérique détaillée d'un écoulement ou mesurée par Vélocimétrie à Images de Particules (*Particle Image Velocimetry* ou PIV) alors ce nombre de points de grille  $N_x$  peut rapidement devenir très important<sup>23</sup>. La taille du problème POD à résoudre numériquement est alors telle que les algorithmes classiques de calcul des valeurs propres ne sont plus assez performants pour assurer une bonne précision numérique aux résultats. Dans ces conditions, il est parfois nécessaire d'utiliser des bibliothèques numériques dédiées aux problèmes de grande taille comme la bibliothèque ARPACK<sup>24</sup>.

Or, puisque la POD est une généralisation de l'analyse de Fourier aux directions inhomogènes (Cordier et Bergmann, 2002a, §6), une manière d'éviter d'être face à un problème aux valeurs propres de grande taille, consiste à décomposer les directions de l'écoulement en directions homogènes (pour lesquelles, on appliquera la décomposition de Fourier) et en directions inhomogènes (pour lesquelles, on appliquera la POD). Cette approche est généralement utilisée dans les études expérimentales (Delville *et al.*, 1999; Ukeiley *et al.*, 2001, par exemple) afin de simplifier la résolution numérique du problème POD.

Enfin, considérons que le nombre de réalisations temporelles nécessaire pour décrire l'écoulement est égal à  $N_t$  où  $N_t \ll N_x$ . Dans ces conditions, même si le problème aux valeurs propres peut être résolu de manière précise, beaucoup de temps de calcul peut être économisé en cherchant à résoudre uniquement un problème de taille  $N_t$ . Cette remarque est au cœur de la méthode des snapshots présentée à la section suivante.

#### 2.6.4 Méthodes des snapshots

La méthode des snapshots, imaginé par Sirovich (1987a,b,c), est l'exacte symétrique de la POD classique. L'opérateur de moyenne correspond alors à une moyenne spatiale évaluée sur tout le domaine  $\Omega$  :

$$\langle \cdot \rangle = \int_{\Omega} \cdot dx$$

et la variable  $\mathbf{X}$  est assimilée à  $t$ .

La méthode des snapshots est représentée de manière schématique sur la figure 10.

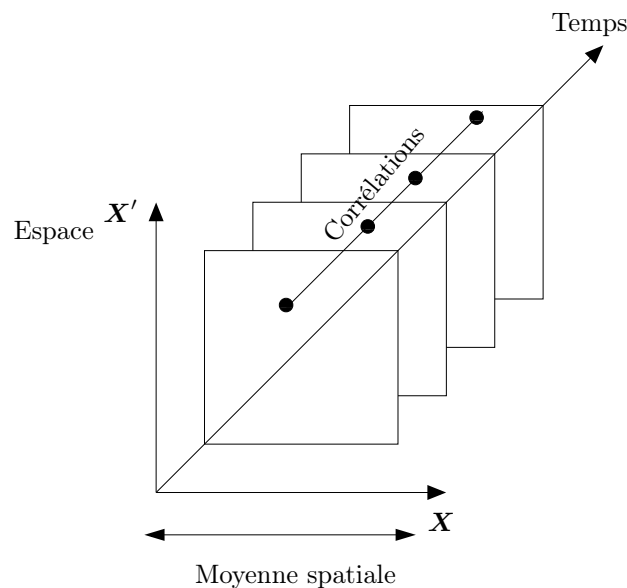


FIGURE 10 – Représentation schématique de la méthode des snapshots.

<sup>23</sup>On rappelle que dans le cas de la simulation numérique par DNS utilisée par Bewley *et al.* (2001) pour contrôler par contrôle optimal un écoulement de canal, ce nombre de points de grille était égal à  $10^8$ .

<sup>24</sup><http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK>



L'idée, à la base de la méthode, est de considérer que les fonctions propres spatiales  $\Phi(\mathbf{x})$  peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des réalisations  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k)$  contenues dans la base de données, soit :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_t} a(t_k) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k). \quad (32)$$

On recherche alors les coefficients  $a(t_k)$ ,  $k = 1, \dots, N_t$  tels que les fonctions propres  $\Phi$  soient solutions de l'équation (31). Après quelques développements détaillés dans Cordier et Bergmann (2002a), on trouve que, dans ce cas, le problème aux valeurs propres à résoudre est donné par :

$$\int_T C(t, t') a_n(t') dt' = \lambda_n a_n(t) \quad (33)$$

où  $C(t, t')$  est le tenseur des corrélations temporelles défini<sup>25</sup> comme :

$$C(t, t') = \frac{1}{T} \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t') d\mathbf{x} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{N_{POD}} a_n(t) a_n^*(t').$$

Les caractéristiques principales de la méthode des snapshots sont les suivantes :

1. Les fonctions propres ne dépendent que du temps.
2. Les corrélations croisées n'apparaissent pas dans le noyau du problème.
3. Il n'est pas nécessaire de faire appel à une hypothèse d'homogénéité pour éventuellement diminuer la taille du problème aux valeurs propres.
4. Les réalisations sont supposées linéairement indépendantes.
5. La taille du problème aux valeurs propres (33) est égale à  $N_{POD} = N_t$ . Par conséquent, comme cela a déjà été mentionné à la section 2.6.3, la méthode des snapshots permet de réduire de manière considérable le coût numérique associé à la résolution du problème POD, lorsque  $N_x$ , le nombre de points en espace est bien plus grand que  $N_t$ , le nombre d'échantillons temporels. Pour cette raison, à chaque fois que cette condition sera vérifiée, la méthode des snapshots sera préférée.

### 2.6.5 Propriétés communes des deux approches POD

**Propriétés générales** Quelle que soit la méthode particulière utilisée pour déterminer les fonctions propres POD spatiales et temporelles, celles-ci vérifient les propriétés suivantes :

1. Toute réalisation  $u_i(\mathbf{x}, t)$  peut se décomposer sur la base des fonctions orthogonales  $\Phi_n^i(\mathbf{x})$  comme

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a_n(t) \Phi_n^i(\mathbf{x})$$

avec des coefficients temporels  $a_n(t)$  non corrélés entre eux.

2. On impose<sup>26</sup> aux fonctions propres spatiales  $\Phi_n(\mathbf{x})$  de former une famille orthonormale :

$$\int_{\Omega} \Phi_n(\mathbf{x}) \cdot \Phi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{nm},$$

et par voie de conséquences,

3. les modes propres temporels  $a_n(t)$  forment une famille orthogonale :

$$\frac{1}{T} \int_T a_n(t) a_m^*(t) dt = \lambda_n \delta_{nm}.$$

<sup>25</sup>Dans cette définition, la sommation sur l'indice  $i$  est implicite.

<sup>26</sup>On rappelle que le choix de faire porter l'orthonormalité sur les fonctions propres spatiales ou sur les fonctions propres temporelles est plutôt arbitraire (§ 2.5.2, point 4).

**Incompressibilité et conditions aux limites** Les fonctions propres spatiales  $\Phi_n^i(\mathbf{x})$  peuvent être calculées à partir des réalisations  $u_i(\mathbf{x}, t)$  et des coefficients de projection  $a_n(t)$  par la relation (Sirovich, 1987a) :

$$\Phi_n^i(\mathbf{x}) = \frac{1}{T \lambda_n} \int_T u_i(\mathbf{x}, t) a_n^*(t) dt. \quad (34)$$

Les fonctions propres spatiales s'écrivent donc comme combinaison linéaire de champs de vitesse instantanée. Par conséquent, toutes les propriétés pouvant s'écrire en fonction des réalisations  $\mathbf{u}$  comme des équations linéaires et homogènes passeront directement aux fonctions propres spatiales. Par exemple, si les réalisations  $\mathbf{u}$  correspondent à un écoulement incompressible alors les fonctions propres POD vérifieront elles-mêmes la condition d'incompressibilité :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \implies \nabla \cdot \Phi_n = 0 \quad \forall n = 1, \dots, N_{POD}.$$

De même, si les réalisations  $\mathbf{u}$  vérifient des conditions aux limites de Dirichlet homogènes alors les fonctions propres POD vérifieront le même type de conditions.

### 2.6.6 Méthode des snapshots ou POD classique ?

Puisque deux approches POD différentes existent, il est légitime de se demander comment choisir au cas par cas la méthode la plus performante ? Comme on va le voir par la suite, la réponse dépend essentiellement du type de données accessibles pour évaluer le noyau du problème POD.

D'un côté, les données issues de simulations numériques qu'elles soient directes ou aux grandes échelles, sont souvent très bien résolues en espace et en temps. Cependant, en raison du coût de calcul souvent important, seul un petit échantillon temporel est disponible. De même, si une bonne résolution spatiale est obtenue par vélocimétrie par images de particules, la résolution temporelle est souvent faible. Ces deux configurations, caractérisées par une histoire temporelle limitée et par une résolution spatiale élevée, correspondent à des situations pour lesquelles le tenseur des corrélations temporelles  $C(t, t')$  est statistiquement bien convergé.

De l'autre côté, les techniques anémométriques fils chauds ou Laser Doppler fournissent une description temporelle bien résolue et des échantillons temporels très longs mais s'accompagnent d'une description spatiale très limitée. Dans ces conditions, c'est le tenseur des corrélations spatiales en deux points  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  qui est alors bien convergé statistiquement.

En conclusion, les données issues d'approches expérimentales seront généralement<sup>27</sup> traitées par la méthode classique et les données provenant d'approches numériques par la méthode des snapshots.

## 3 Modèles d'Ordre Réduit basés sur la POD (POD ROM)

### 3.1 Introduction

#### 3.1.1 Motivations

L'objectif de cette section est de démontrer que la dynamique non linéaire des écoulements peut être modélisée de manière fiable par l'intermédiaire de modèles réduits basés sur des fonctions POD (*Proper Orthogonal Decomposition Reduced Order Model* ou POD ROM). Comme il a déjà été mentionné dans l'introduction, dans un problème de simulation numérique ou d'optimisation en mécanique des fluides, les systèmes matriciels obtenus après discrétisation spatiale sont généralement de grande taille. La résolution numérique d'un seul système d'état est donc souvent coûteuse en temps CPU et en occupation mémoire. Or, les procédures d'optimisation étant souvent itératives, il est nécessaire de résoudre les équations d'état un grand nombre de fois, ce qui représente au final la majeure partie des temps de calcul. Afin de développer des stratégies de contrôle optimale appropriées aux écoulements de fluides visqueux et incompressibles, et en particulier au contexte temps réel nécessité par le contrôle actif en boucle fermée, il est nécessaire de déterminer des modèles d'ordre réduit susceptibles d'approximer les modèles discrétisés d'ordre élevé au cours du processus d'optimisation. Un grand nombre de bases peut être utilisé pour réduire l'ordre des modèles, citons les bases de Lagrange, d'Hermite, de Taylor, de Krylov (Willcox, 2000), les bases POD et leurs différents avatars ("Balanced POD"

<sup>27</sup>Cependant, une exception correspond au cas de données obtenues par vélocimétrie par images de particules.

proposé par Rowley, 2004, par exemple), ... Pour une revue complète des bases pouvant être utilisées, le lecteur pourra se référer à Ito et Ravindran (1998). Dans ces notes, nous avons fait le choix d'utiliser pour base réduite d'approximation, une base déterminée par POD, en raison de son optimalité de convergence énergétique. Plus précisément, nous avons retenu la méthode des snapshots (section 2.6.4) car elle est de loin la méthode la plus utilisée actuellement en mécanique des fluides. Des exemples de modèles réduits de dynamique construits à partir de la méthode classique de la POD pourront être trouvés dans Aubry *et al.* (1988) et Ukeiley *et al.* (2001).

A la section 2, il a été démontré que les fonctions propres POD formaient une base complète de fonctions orthonormales, c'est à dire que chaque réalisation spatio-temporelle  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  pouvait se décomposer sur cette base de la manière suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a_n(t) \Phi_n(\mathbf{x}), \quad (35)$$

avec

$$a_n(t) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \Phi_n(\mathbf{x})) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \Phi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (36)$$

où  $\Phi_n(\mathbf{x})$  sont les fonctions propres spatiales POD et  $N_{POD}$ , le nombre total de modes POD.

Une méthode classique de construction d'un système dynamique d'ordre réduit pour les coefficients temporels  $a_n(t)$ , consiste à utiliser une projection de Galerkin des équations d'état sur la base POD. Cette méthode de Galerkin, qui sera décrite à la section 3.2, permet d'obtenir, à partir d'un ensemble de réalisations  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  issu par exemple d'une configuration non contrôlée de l'écoulement, un modèle d'ordre réduit des équations de Navier-Stokes, capable de représenter la dynamique de la configuration de départ. Cependant, il n'existe aucune garantie que le modèle réduit ainsi construit soit efficace pour modéliser une dynamique d'écoulement, éventuellement altérée par application du contrôle. Cette question essentielle est abordée dans la section suivante.

### 3.1.2 Utilisation de modèles d'ordre réduit en optimisation

**Représentativité des modèles réduits POD** Les gains attendus par les approches par réduction de modèle reposent sur l'hypothèse qu'une réduction est *a priori* possible. Or, d'un point de vue de la théorie de l'information, la POD s'interprète comme une méthode qui supprime l'information redondante contenue dans l'ensemble des réalisations de la base de données utilisée pour construire la base POD. Par conséquent, si toutes les réalisations de la base sont prises linéairement indépendantes, alors il n'y a aucun espoir de réduction<sup>28</sup> de modèles, les éléments de l'espace  $V_{POD}$ , l'espace vectoriel engendré par les fonctions propres POD, étant confondus avec les réalisations de la base de données. La base POD est donc incapable de représenter une information qui n'était pas contenue initialement dans la base de données utilisée pour la déterminer. A moins de prendre des précautions particulières, il est donc fortement improbable d'espérer utiliser une base POD déterminée pour un écoulement non contrôlé, pour rechercher à résoudre un problème de contrôle d'écoulement. Effectivement, Prabhu *et al.* (2001) ont mis numériquement en évidence pour un écoulement de canal, que la base POD, attachée à une configuration contrôlée de l'écoulement, était fortement altérée en comparaison avec la base POD de l'écoulement non contrôlé. Cela interdisait même tout espoir d'utiliser la base POD, déterminée en écoulement non contrôlé, pour déterminer une stratégie de contrôle.

Une condition, nécessaire (mais pas suffisante), d'utilisation de modèles réduits construits par POD en contrôle d'écoulements repose donc sur la génération d'une "bonne" base de données. Idéalement, on aimerait construire une base de données qui contienne toute l'information nécessaire à la résolution ultérieure d'un problème d'optimisation par modèle réduit. A défaut, on souhaiterait que cette base de données contienne autant d'information que possible. Mais le problème n'est pas simple. Pour s'en convaincre, considérons un problème d'optimisation quelconque posé dans l'espace des paramètres (figure 11(a)). En supposant connu le chemin qui mène à l'optimum avec le modèle précis, la construction de la base de données POD serait facile à réaliser, il suffirait pour cela de considérer des réalisations de l'espace des paramètres situées "suffisamment proches" du chemin vers l'optimum (figure 11(b)). Chacun des états successifs du processus d'optimisation

<sup>28</sup>Le seul critère à notre disposition pour tester si une réduction de modèle est envisageable est un critère *a posteriori* sur la vitesse de décroissance des valeurs propres. Plus elle est rapide, et plus il y aura d'informations redondantes dans la base de données. Ce point est naturellement à relier avec la vitesse de décroissance des valeurs singulières.

pouvant alors être décrits par la base réduite, il existerait des garanties importantes pour que le modèle réduit construit sur  $V_{POD}$  soit utilisable pour déterminer l'optimum. Gunzburger (2000) explique d'ailleurs de cette manière les succès rencontrés jusqu'alors par l'utilisation de modèles réduits de dynamique pour optimiser des écoulements. La difficulté pratique est que ce chemin n'est naturellement pas connu. Sans autre information sur le système à optimiser (et en particulier sur la valeur des paramètres optimaux que l'on recherche), il y a de forte probabilité qu'en prenant "au hasard" les réalisations de la base de données, celles-ci ne soient d'aucune utilité pour résoudre le processus d'optimisation (figures 11(c) et 11(d)).

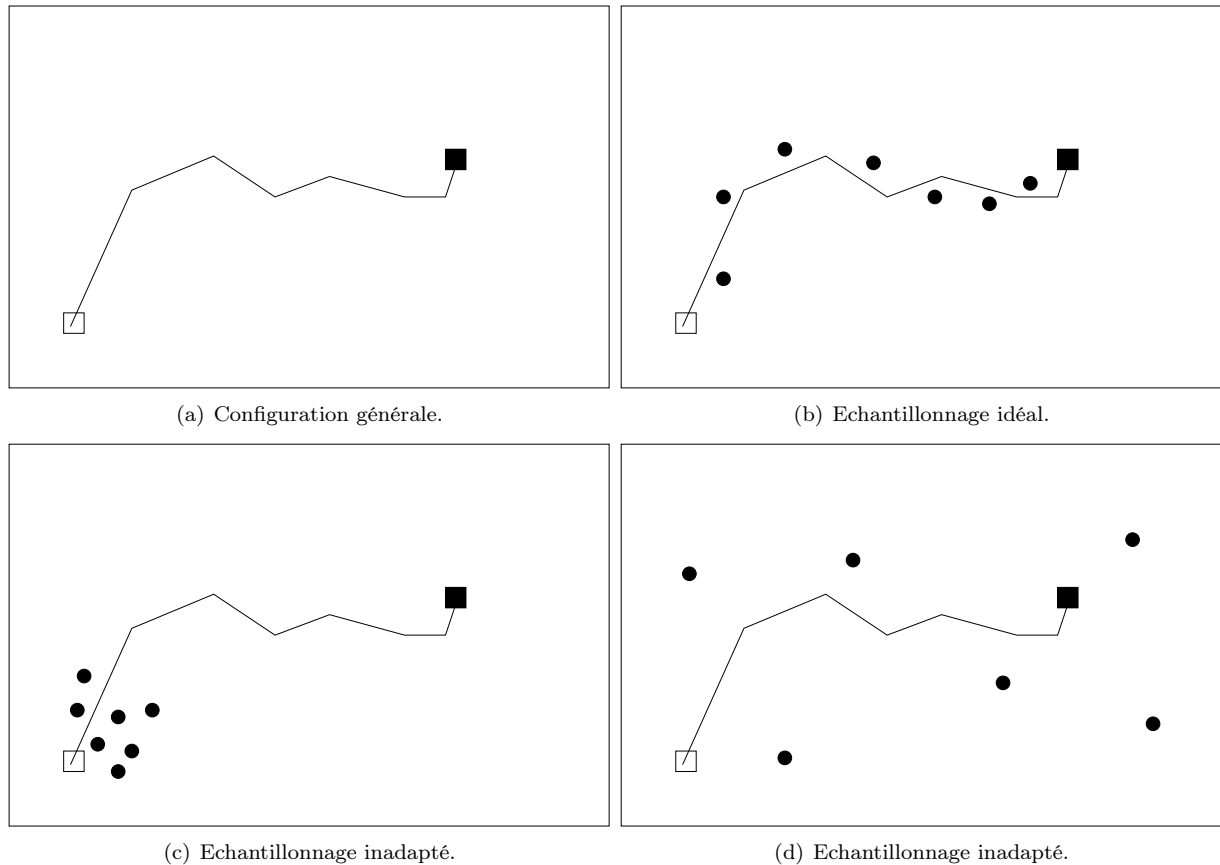


FIGURE 11 – Représentation schématique d'un problème d'optimisation dans l'espace des paramètres de contrôle. — chemin d'optimisation, conditions initiale  $\square$  et terminale  $\blacksquare$  du processus d'optimisation,  $\bullet$  réalisation utilisée pour la base de données.

Dans ces conditions, comment procéder pour choisir "au mieux" les réalisations à utiliser pour construire la base POD? A l'heure actuelle, il n'existe pour ainsi dire pas<sup>29</sup> de méthode systématique, rationnelle et efficace pour générer ces réalisations. Une manière de procéder consiste à exciter l'écoulement de manière *ad-hoc* afin de construire des réalisations qui possèdent la dynamique la plus "riche" possible. Cette méthode a été mise en œuvre avec un certain succès dans Bergmann *et al.* (2005). L'inconvénient est que la construction de la base de données ne repose sur aucune base théorique sérieuse. En particulier, il n'existe aucune assurance mathématique que la solution optimale obtenue à partir du modèle réduit POD corresponde à celle que l'on aurait déterminée en utilisant les équations de Navier-Stokes comme système d'état. Pour cela, on qualifie la solution de sous-optimale. Une autre méthode consiste à utiliser une méthode adaptative par laquelle on construit pas à pas la solution optimale dans l'espace des paramètres de contrôle (figure 12). Ainsi, les contraintes sur la détermination des réalisations ne sont plus aussi fortes que précédemment car chaque base réduite ne doit plus représenter qu'une zone limitée de l'espace des paramètres. L'inconvénient est qu'il faut alors déterminer le moment où la base réduite n'est plus en mesure de représenter correctement le modèle

<sup>29</sup>Une méthode couplant la POD et une approche par *Centroidal Voronoi Tessellation* a récemment été proposée par Gunzburger (Burkardt *et al.*, 2004) pour déterminer de manière "intelligente" les réalisations à introduire dans la base de données POD. Cette méthode nécessite encore des investigations complémentaires, en particulier en mécanique des fluides.

précis. Ce point est discutée au paragraphe suivant.

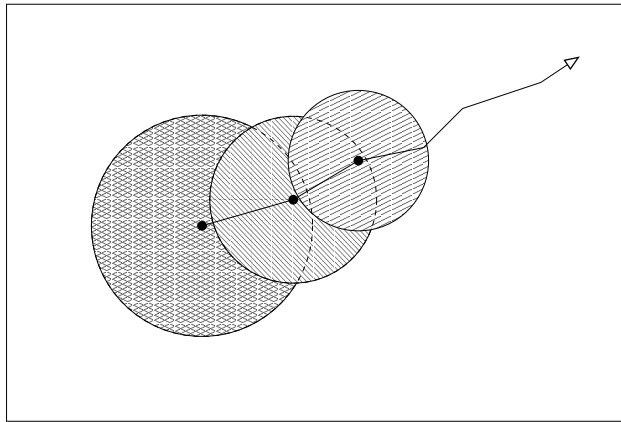


FIGURE 12 – Représentation schématique de l'optimisation par méthode adaptative et région de confiance.

**Méthode adaptative et POD** La figure 13 représente schématiquement les principes d'utilisation de modèles simplifiés dans des méthodes d'optimisation. Afin de réactualiser la base POD, qui n'est peut être plus adaptée pour représenter une dynamique contrôlée particulière, il est possible d'avoir éventuellement recours au modèle détaillé au cours du processus d'optimisation du modèle simplifié. L'algorithme modèle peut donc s'énoncer de la manière suivante :

Choix d'une loi de contrôle initiale

1. Résolution des équations de Navier-Stokes avec la dernière loi de contrôle, extraction d'un ensemble de réalisations de l'écoulement et évaluation de la fonction objectif.
2. Si un critère de convergence donné est satisfait, l'algorithme est arrêté, sinon on va à l'étape 3.
3. Détermination d'une base POD et construction d'un modèle réduit.
4. Détermination d'une nouvelle loi de contrôle, non nécessairement optimale, après quelques itérations du processus d'optimisation utilisant le modèle réduit, puis retour à l'étape 1.

Le point faible de cet algorithme est l'étape 4. En effet, tel qu'il a été formulé, aucun critère n'est imposé pour décider du moment où il devient nécessaire de retourner au modèle détaillé du problème (ici les équations de Navier-Stokes) pour reconstruire un modèle réduit de dynamique. En dépit de ces remarques, Ravindran (2000a) a mis en œuvre avec succès cet algorithme dans le cas d'une marche descendante, réussissant à améliorer la représentativité des modèles réduits au cours du processus d'optimisation. Cependant, le même algorithme, utilisé dans le cas du sillage laminaire d'un cylindre circulaire, n'a pas permis de converger (Bergmann et Cordier, 2006). Afin de rendre ce type d'algorithme plus robuste, c'est à dire de s'assurer que la solution obtenue par optimisation du modèle réduit converge au moins vers un minimum local du problème précis (convergence globale), Alexandrov *et al.* (1997) proposent d'utiliser des algorithmes à régions de confiance (Conn *et al.*, 2000) afin d'estimer à quel moment il est nécessaire d'avoir recours au modèle détaillé. En effet, les méthodes à régions de confiance donnent une mesure de l'évolution de l'objectif réel, associé au modèle détaillé, par rapport à l'évolution d'un objectif modèle, correspondant au modèle réduit. Cette mesure permet d'évaluer l'efficacité du modèle réduit dans le processus d'optimisation. Lorsque ce modèle n'est plus suffisamment efficace, il sera automatiquement amélioré en ayant recours au modèle détaillé. Un algorithme couplant régions de confiance et modèle réduit (*Trust Region Proper Orthogonal Decomposition*, TRPOD) introduit par Fahl (2000), a été utilisé avec succès dans le cas du sillage d'un cylindre circulaire (Bergmann et Cordier, 2006). Les résultats feront d'ailleurs l'objet d'une présentation en séminaire.

Le reste de la section est organisé de la manière suivante. Dans un premier temps, la projection de Galerkin est introduite, en insistant tout particulièrement sur la prise en compte des conditions aux limites (§ 3.2). Ensuite, cette méthode est appliquée à l'écoulement de sillage d'un cylindre circulaire (§ 3.3), en considérant

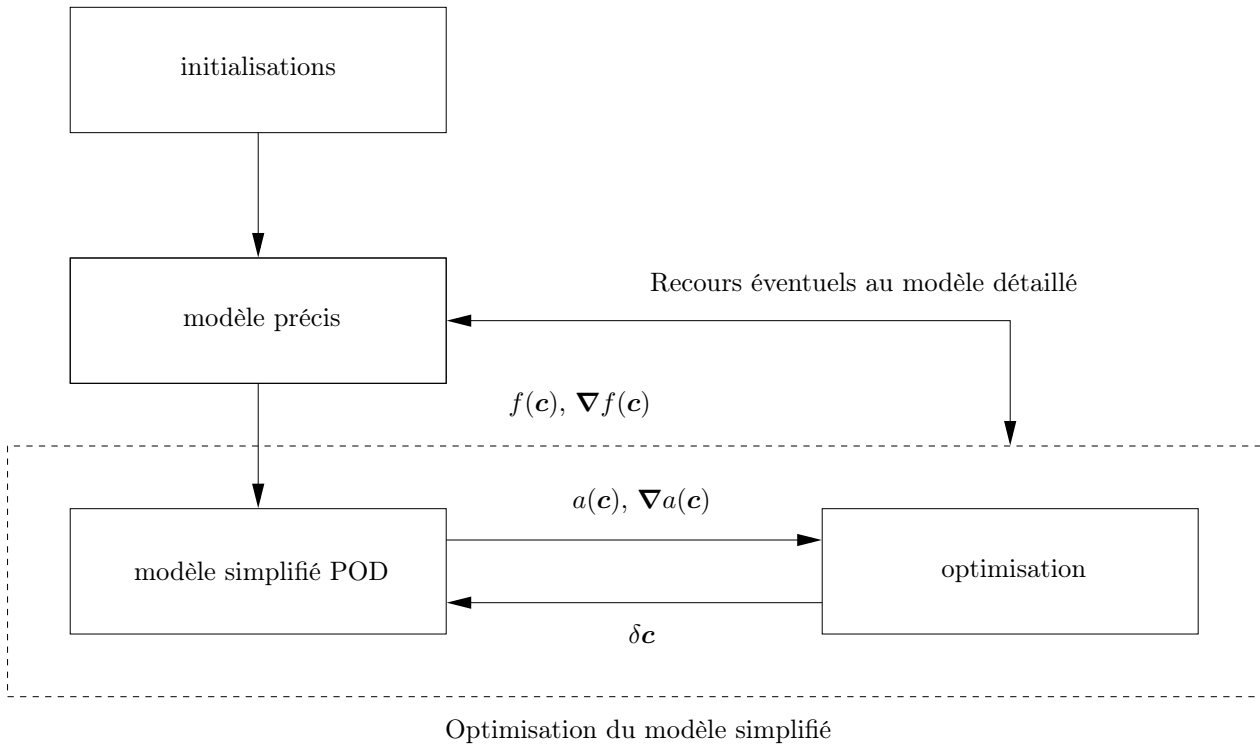


FIGURE 13 – Algorithme d’optimisation basé sur des modèles réduits.

une projection sur la base des fonctions propres POD (approche dite POD-Galerkin). Un modèle d’ordre réduit de dynamique non contrôlée, sera tout d’abord construit, puis, la méthode dite de la *fonction de contrôle* sera introduite (Graham *et al.*, 1999a), permettant ainsi de faire intervenir explicitement dans le modèle réduit la loi de contrôle. Pour réduire l’ordre du modèle POD, les modes POD d’indice supérieur à un certain seuil sont alors négligés. Une méthode de calibration permettant de modéliser les interactions entre les modes calculés par POD ROM et les modes non pris en compte dans le système réduit est finalement présentée, avec pour objectif d’améliorer la représentativité dynamique du modèle réduit (§ 3.4).

## 3.2 Projection de Galerkin

Après avoir présenté très brièvement quelques généralités sur la projection de Galerkin (§ 3.2.1), nous nous attacherons à appliquer ce type de méthode aux fonctions propres POD (§ 3.2.2). Enfin, la prise en compte des conditions aux limites sera abordée (§ 3.2.3).

### 3.2.1 Généralités

La projection de Galerkin est un cas particulier des *méthodes à résidus pondérés*. Ces méthodes sont généralement utilisées pour résoudre des systèmes d’équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles ou encore des équations intégrales. Par exemple, considérons l’équation

$$\mathcal{L}(u) = 0, \quad (37)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel et  $u(\mathbf{x})$  le champ scalaire inconnu défini sur un domaine  $\Omega$ . On cherche une approximation,  $\tilde{u}$ , de la solution exacte,  $u$ . Le résidu de l’équation (37) est défini par

$$r(\tilde{u}) = \mathcal{L}(\tilde{u}) \neq 0. \quad (38)$$

La meilleure approximation possible pour  $u$  correspond à celle qui réduit au minimum le résidu  $r$  pondéré par  $w_j$ , fonctions quelconques, dites fonctions de pondération ou encore fonctions test, et cela de manière intégrale sur tout le domaine  $\Omega$ . La méthode des résidus pondérés consiste donc à annuler le résidu pondéré  $R_j$ , défini ainsi :

$$R_j = \int_{\Omega} w_j r \, d\Omega = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (39)$$

Dans la méthode de Galerkin, les fonctions de poids sont choisis identiques aux fonctions de base utilisées dans le développement de la solution approchée. Par conséquent, si  $\tilde{u}$  est approximée par

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (40)$$

où  $\varphi_i(\mathbf{x})$  sont les fonctions de base et  $\chi_i$  les coefficients à déterminer, alors les fonctions de poids sont telles que  $w_j = \varphi_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, \dots, +\infty$ . Le fait que  $u$  appartienne à un espace vectoriel de dimension infinie est une difficulté pratique. L'étape de discrétisation de la méthode de Galerkin consiste à tronquer la somme intervenant dans l'équation (40) à un indice fini, noté  $i_{max}$ , transformant ainsi le problème en dimension finie. Par conséquent, l'équation (39) devient :

$$\int_{\Omega} \varphi_j(\mathbf{x}) \mathcal{L}(\tilde{u}) \, d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, i_{max} \quad (41)$$

soit encore, en utilisant un produit scalaire homogène à celui considéré dans l'équation (36) :

$$\left( \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^{i_{max}} \chi_i \varphi_i(\mathbf{x}) \right), \varphi_j \right) = 0 \quad j = 1, \dots, i_{max}. \quad (42)$$

Finalement, la projection de Galerkin revient à imposer aux  $i_{max}$  produits scalaires définis par l'équation (42) de s'annuler.

Pour qu'une telle méthode fonctionne (Rempfer, 1996), les deux conditions suivantes doivent être vérifiées :

1. les fonctions de base  $\varphi_i(\mathbf{x})$  doivent former un espace complet et, pour des raisons pratiques qui deviendront évidentes à la section suivante, il est préférable que celles-ci forment une base orthonormée.
2. les fonctions de base doivent satisfaire les conditions aux limites du problème.

### 3.2.2 Modèles d'ordre faible basés sur la POD

En raison de leurs propriétés (§ 2.5.2), les fonctions de base POD,  $\Phi(\mathbf{x})$ , sont bien appropriées pour être utilisées dans une projection de Galerkin.

Considérons les équations de Navier-Stokes écrites pour un fluide incompressible étudié dans un domaine  $\Omega$  :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad (43)$$

où  $\mathbf{F}$  est un opérateur différentiel spatial,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  et  $t \geq 0$ . À ces équations sont ajoutées des conditions initiales  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  et des conditions aux limites. En mécanique des fluides, ces équations peuvent être utilisées dans le cadre d'un problème de contrôle (instationnaire) de paroi. Supposons que les frontières  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  peuvent se décomposer en des frontières  $\Gamma_c$  sur lesquelles le contrôle est appliqué et des frontières  $\Gamma \setminus \Gamma_c$  non contrôlées. Les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \gamma(t) \mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_c, \quad (44a)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \Gamma_c. \quad (44b)$$

Dans ces équations,  $\gamma(t)$  peut être interprété comme la variation temporelle de la fonction spatiale  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  sur  $\Gamma_c$ . Cette loi de contrôle  $\gamma(t)$  peut par exemple correspondre à un cas de soufflage-aspiration sur une partie d'une aile d'avion pour un profil de vitesse  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  identique à celui représenté sur la figure 14.

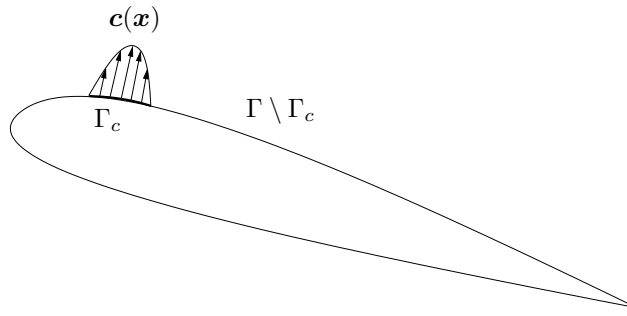


FIGURE 14 – Représentation de la fonction spatiale  $c(\mathbf{x})$  associée aux conditions aux limites instationnaires contrôlées ( $c(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_c$  et  $c(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$  sur  $\Gamma \setminus \Gamma_c$ ).

Le champ vectoriel  $\mathbf{u}$  peut être projeté sur l'espace de dimension  $N_{gal}$  défini par les vecteurs propres POD  $\Phi_i$ , correspondant aux modes les plus énergétiques de l'écoulement<sup>30</sup> :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}). \quad (45)$$

En introduisant l'expression (45) de  $\mathbf{u}$  dans l'équation (43), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N_{gal}} \frac{da_i}{dt} \Phi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \left( \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) \right).$$

Les fonctions  $\Phi_i$  formant une base, la relation précédente se réécrit :

$$\sum_{i=1}^{N_{gal}} \frac{da_i}{dt} \Phi_i(\mathbf{x}) = \sum_j \mathcal{F}_j(a_1, a_2, \dots, a_{N_{gal}}) \Phi_j(\mathbf{x}). \quad (46)$$

Compte tenu de l'orthonormalité des fonctions propres POD, une projection de Galerkin des équations (46) sur la base  $\Phi_n$  donne :

$$\frac{da_n(t)}{dt} = \mathcal{F}_n(a_1, a_2, \dots, a_{N_{gal}}), \quad n = 1, \dots, N_{gal}. \quad (47)$$

L'opérateur  $\mathbf{F}$  représentant les termes convectifs et diffusifs des équations de Navier-Stokes, l'opérateur  $\mathcal{F}$  fait en général intervenir des combinaisons linéaires et quadratiques des coefficients temporels  $a_n(t)$ .

Pour que le système (47) soit bien posé, on lui ajoute des conditions initiales  $a_n(t = 0) = a_n^0$  avec  $a_n^0 = (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \Phi_n(\mathbf{x}))$ .

En résumé, nous avons montré qu'en réalisant une projection de Galerkin sur les fonctions de base POD, les équations de Navier-Stokes pouvaient être approchées par un système dynamique d'ordre réduit (non-linéaire), représenté mathématiquement par des Equations Différentielles Ordinaires (EDOs).

### 3.2.3 Conditions aux limites

A la section 2, nous avons montré que les fonctions de base POD  $\Phi_n$  peuvent s'écrire de manière linéaire en fonction des réalisations  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Plus précisément, on a

$$\Phi_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{T\lambda_n} \int_T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) a_n(t) dt, \quad (48)$$

où  $\lambda_n$  représente les valeurs propres de la matrice de corrélation temporelle.

<sup>30</sup>On verra à la section 3.2.3 que d'autres décompositions du champ de vitesse sont envisageables.



La relation (48) montre que les fonctions de base  $\Phi_n$  héritent des propriétés qui peuvent s'écrire de manière linéaire et homogène en fonction des champs de vitesse  $\mathbf{u}$ . En particulier, si les équations de Navier-Stokes sont résolues sur un domaine muni de conditions aux limites homogènes, *i.e.*  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ , alors les fonctions de base POD vérifient également des conditions aux limites homogènes. Dans ce cas, la décomposition suivante, réalisée sur les  $N_{gal}$  premiers modes POD, peut être utilisée :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}),$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}$  est une approximation de Galerkin de la solution exacte  $\mathbf{u}$  des équations de Navier-Stokes.

Si maintenant les équations de Navier-Stokes sont munies de conditions aux limites non-homogènes pour les vitesses, *i.e.*  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{0}$  sur certaines frontières du domaine de calcul, alors les fonctions de base POD ne peuvent plus être utilisées dans la projection de Galerkin comme le montre l'équation (48). Il devient alors nécessaire de transformer le problème initial muni de conditions aux limites non-homogènes en un problème muni de conditions aux limites homogènes.

Si les conditions aux limites sont indépendantes du temps, *i.e.* si  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , Sirovich (1987a) propose de calculer une base POD associée aux fluctuations des champs de vitesse autour de la moyenne temporelle  $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ . Les fonctions de base POD sont alors estimées à l'aide des données modifiées  $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{N_t}) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x})\}$  où  $N_t$  est le nombre de réalisations disponibles. Par construction, les champs  $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$  et donc  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x})$  sont à divergence nulle. Le champ moyen  $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$  vérifie les conditions aux limites non-homogènes du problème et donc, le champ  $\mathbf{u}_{POD}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x})$  vérifie, lui, des conditions aux limites homogènes.

En résumé, la base POD peut être déterminée dans le cas de conditions aux limites non-homogènes et indépendantes du temps par la décomposition suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}). \quad (49)$$

Cette relation peut s'écrire de manière condensée

$$\sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t),$$

en posant

$$\tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}),$$

la décomposition du champ de vitesse sur  $N_{gal}$  modes propres POD dans le cas d'un système non contrôlé.

Les conditions aux limites non-homogènes peuvent également dépendre du temps, *i.e.*  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ . Ce cas est très courant dans des problèmes de contrôle instationnaire avec contrôle frontière par exemple. Afin de rendre les conditions aux limites homogènes, Graham *et al.* (1999a,b), Ravindran (2000a,b) et Fahl (2000) proposent la méthode de la fonction de contrôle, qui consiste à utiliser la décomposition suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}). \quad (50)$$

Cette relation peut également s'écrire de façon condensée

$$\sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}_c^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t),$$

en posant

$$\tilde{\mathbf{u}}_c^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) - \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}),$$

la décomposition du champ de vitesse sur  $N_{gal}$  modes propres POD dans le cas d'un système contrôlé.

Ici  $\mathbf{u}_c(\mathbf{x})$  est un champ de vitesse de référence traduisant de quelle manière le contrôle  $\gamma(t)\mathbf{u}_c(\mathbf{x})$  affecte l'écoulement. Le champ  $\mathbf{u}_c(\mathbf{x})$  correspond aux conditions aux limites suivantes (voir figure 14) :

$$\begin{cases} \mathbf{c}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Gamma_c, \\ \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma_c. \end{cases}$$

Ainsi, le champ  $\tilde{\mathbf{u}}_c^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) - \gamma(t)\mathbf{u}_c(\mathbf{x})$  vérifie des conditions aux limites homogènes. Par définition, les fonctions de base POD vérifient alors des conditions aux limites homogènes et peuvent donc être utilisées dans une projection de Galerkin.

### 3.3 Application au cylindre

Dans cette section, la méthode des snapshots décrite au paragraphe 2.6.4, va être mise en œuvre afin d'extraire les modes énergétiques dominants, correspondant à l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour un nombre de Reynolds égal à 200 (voir figure 15). Les modes les plus énergétiques seront alors utilisés pour déterminer un modèle dynamique d'ordre réduit, par projection de Galerkin du système de Navier-Stokes sur ces modes.

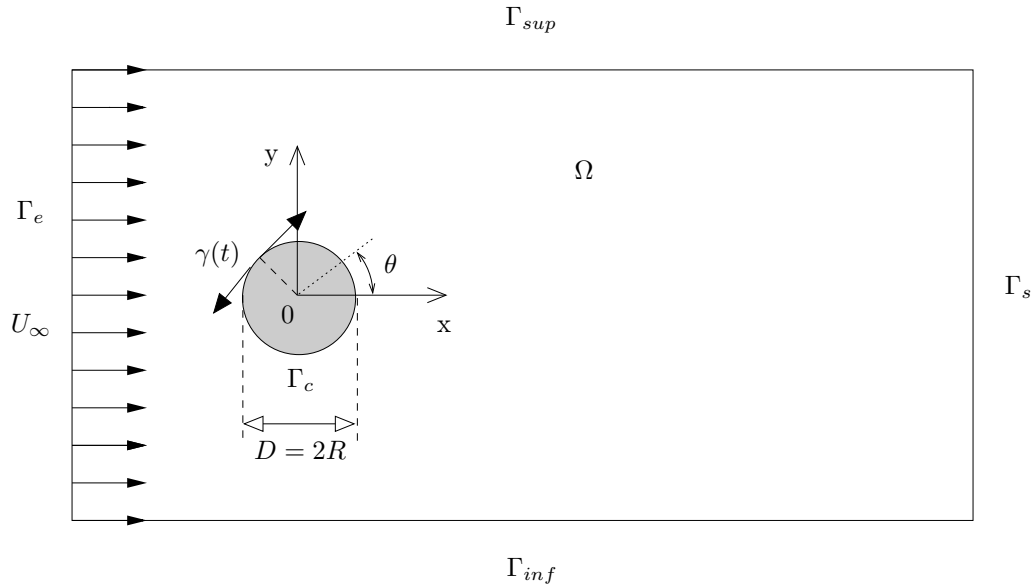


FIGURE 15 – Écoulement de sillage autour d'un cylindre circulaire. Configuration générique d'un écoulement massivement décollé. Paramètre de contrôle  $\gamma(t) = \frac{R\dot{\theta}}{U_\infty}$ .

Afin de simplifier le problème, on s'attachera à générer, dans un premier temps (§ 3.3.1), un modèle d'ordre réduit pour l'écoulement autour d'un cylindre non contrôlé ( $\gamma = 0$ ). Les conditions aux limites seront alors non homogènes, mais stationnaires. Ensuite, on considérera le cas de l'écoulement manipulé par une loi sinusoïdale ( $\gamma(t) = A \sin(2\pi St_f t)$ ) où  $A$  et  $St_f$  sont respectivement l'amplitude et le nombre de Strouhal de forçage de l'écoulement. Les conditions aux limites non homogènes et instationnaires, seront alors incorporés dans le modèle à l'aide de la méthode de la fonction de contrôle (§ 3.3.2).

#### 3.3.1 POD du cylindre stationnaire

**Détermination des fonctions de base POD** Afin de déterminer les fonctions de base POD dans le cas du cylindre stationnaire, la décomposition (49) est utilisée. En définissant  $\tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t_i) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ , le calcul des fonctions de base s'effectue en plusieurs étapes :

1. Calcul du champs moyen  $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$  obtenu sur l'ensemble des réalisations  $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)\}_{i=1, \dots, N_t}$  :

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i).$$

2. Calcul de la matrice de corrélations temporelles  $C$  de composantes  $c_{ij}$  :

$$c_{ij} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t_i) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t_j) d\mathbf{x}.$$

3. Calcul des valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_t}$  et des vecteurs propres temporels<sup>31</sup>  $\Psi_1, \dots, \Psi_{N_t}$  de la matrice  $C$ .
4. Calcul des fonctions POD spatiales  $\Phi_i$  par combinaison linéaire des vecteurs propres temporels  $\Psi_i$  et des réalisations  $\tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}$  :

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_t} \Psi_j(t_j) \tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t_j).$$

5. Normalisation des fonctions de base :

$$\Phi_i = \frac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|}.$$

Les valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 20$ , obtenues en appliquant cet algorithme à un jeu de 305 réalisations réparties uniformément sur trois périodes de Von Kármán (environ  $T = 15, 2$ ) sont représentées sur la figure 16. On constate que ces valeurs propres, tracées en représentation semi-logarithmique, décroissent très rapidement. Le spectre présente également des couples de valeurs propres approximativement de même amplitude, chaque couple étant séparé de l'autre par environ un ordre de grandeur. Ce phénomène est caractéristique d'un problème aux valeurs propres quasi dégénéré, et traduit la présence dominante dans l'organisation physique de l'écoulement d'ondes planes progressives, ce que l'on retrouvera directement dans la structuration des modes propres spatiaux.

La figure 17 représente les modules des six premiers modes POD. On constate que les deux premiers modes sont associés aux deux modes anti-symétriques de l'allée tourbillonnaire de Von Kármán. Les modes 3 et 4 correspondent à une correction apportée à cette projection et modélisent des structures plus fines. Enfin, les modes 5 et 6 représentent une correction d'un ordre encore inférieur, et permettent de modéliser des structures toujours plus fines.

**Détermination des coefficients de projection temporels** Les coefficients de projection temporels  $a_{\tau_i}(t) = a_i(t)$  peuvent se calculer simplement en projetant la relation (49) sur la base POD. On a donc :

$$\left( \tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t), \Phi_j(\mathbf{x}) \right) = \left( \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}), \Phi_j(\mathbf{x}) \right).$$

Compte tenu de l'orthonormalité de la base POD  $\{\Phi_1, \dots, \Phi_{N_{POD}}\}$ , les coefficients de projection temporels se déterminent simplement de la manière suivante :

$$a_j(t) = \left( \tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t), \Phi_j(\mathbf{x}) \right).$$

La figure 18 représente l'évolution temporelle des 6 premiers coefficients de projection obtenus par simulation numérique des équations de Navier-Stokes pour  $\gamma = 0$ . Une forte périodicité est observée qui traduit l'évolution temporelle de l'allée tourbillonnaire de Von Kármán. Par ailleurs, on constate que l'évolution temporelle de chacun des modes de rang impair se déduit aisément de celle des modes de rang pair par simple déphasage. Ce phénomène est bien connu (Cordier, 1996, par exemple) et ne fait que traduire, encore une fois après le spectre des valeurs propres et la structuration spatiale des modes POD, qu'en première approximation, les modes dominants de l'écoulement non contrôlé correspondent à des ondes planes progressives qui se propagent dans le domaine.

<sup>31</sup>Chacun des vecteurs propres temporels s'écrit  $\Psi_j = (\Psi_j(t_1), \Psi_j(t_2), \dots, \Psi_j(t_{N_t}))^T$ .

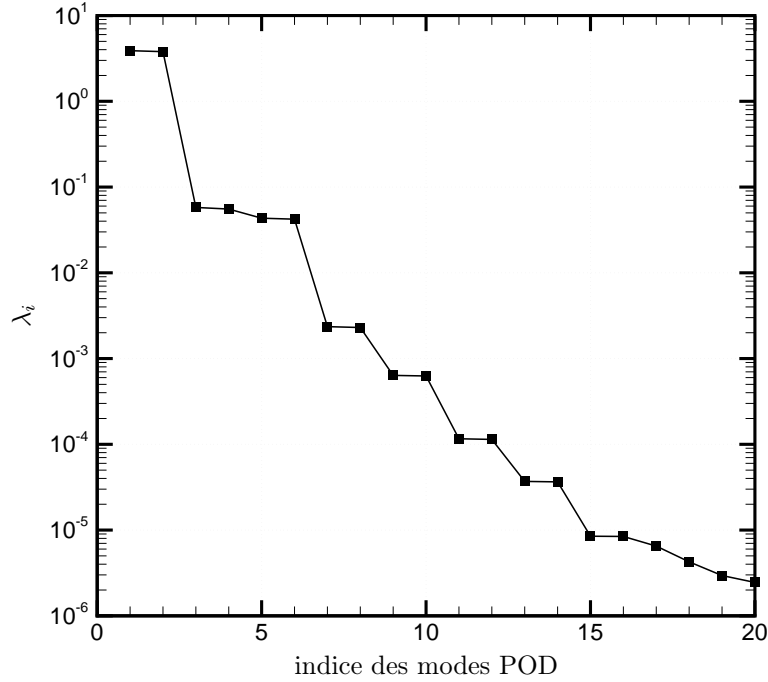


FIGURE 16 – Valeurs propres de la matrice de corrélations temporelles dans le cas du cylindre non contrôlé ( $\gamma = 0$ ).

**Détermination des coefficients de prédiction temporels** Les coefficients de prédiction temporels sont, quant à eux, calculés par résolution d'un système dynamique d'ordre réduit. Ce système est déterminé en réalisant une projection de Galerkin des équations de quantité de mouvement du modèle de Navier-Stokes sur les fonctions de base POD, déterminées précédemment :

$$\left( \Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \left( \Phi_i, -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right).$$

Après intégrations par parties, en utilisant la formule de Green, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \left( \Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= (p, \nabla \cdot \Phi_i) - \frac{1}{Re} ((\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \mathbf{u}) \\ &\quad - [p \Phi_i] + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \Phi_i] \end{aligned} \quad (51)$$

$$\text{avec } [\mathbf{a}] = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \text{ et } (A, B) = \int_{\Omega} A : B d\Omega = \sum_{i,j} \int_{\Omega} A_{ij} B_{ji} d\Omega.$$

On constate que des termes faisant intervenir le champ de pression sont présents dans l'équation (51). Le champ de pression ne se décomposant pas *a priori* sur la même base que les champs de vitesse, la pression ne peut pas être facilement utilisé dans une projection de Galerkin. On souhaite alors éliminer les termes de pression indésirables. Le développement du champ de vitesse (49) est alors utilisé. L'introduction de ce développement dans l'équation de continuité  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  impose aux fonctions de base d'être à divergence nulle, soit  $\nabla \cdot \Phi_i = 0$ . Le terme  $(p, \nabla \cdot \Phi_i)$  présent dans l'équation (51) est alors égal à zéro.

Le terme de frontière  $-[p \Phi_i]$  peut être éliminé de différentes manières :

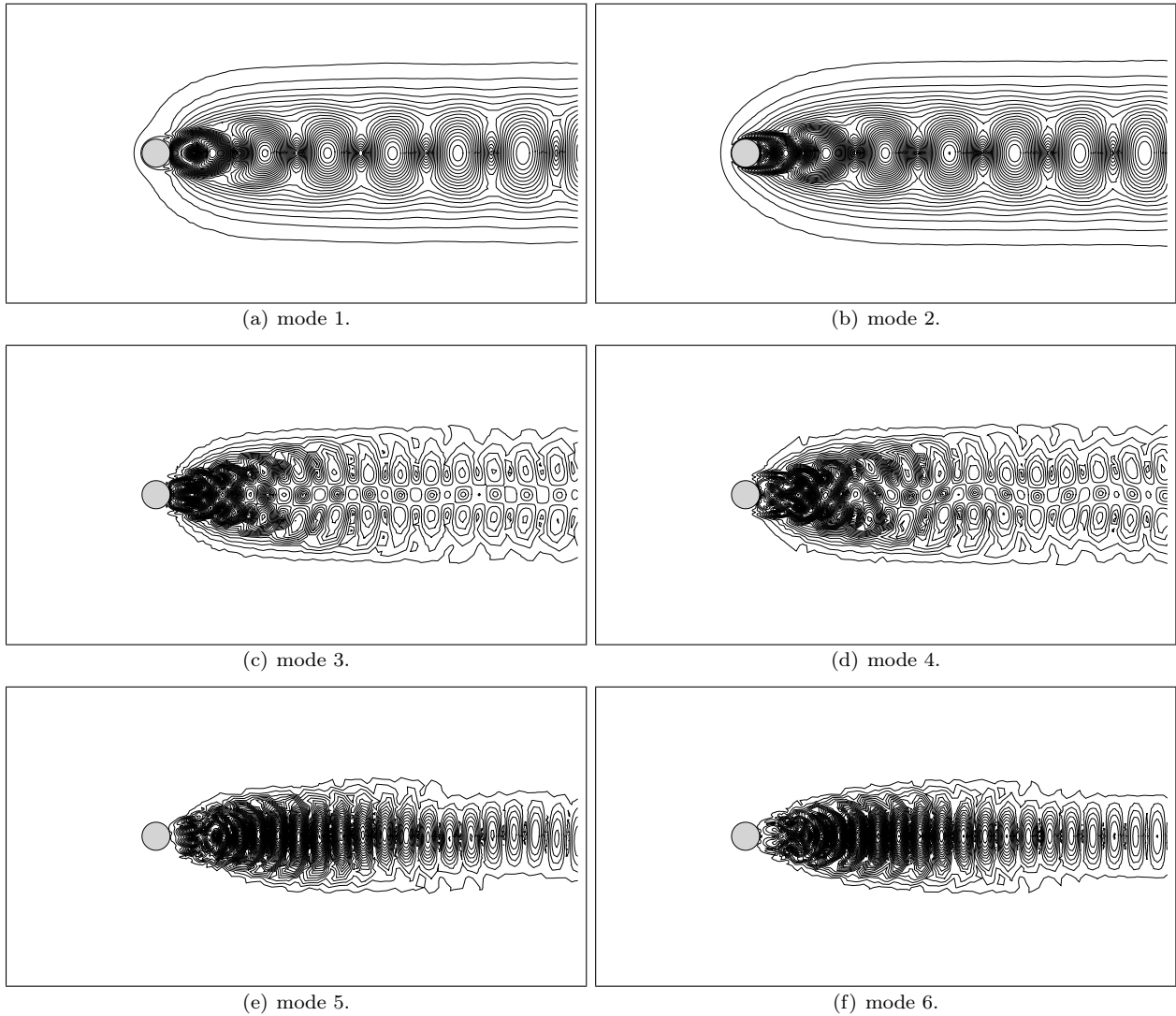


FIGURE 17 – Isovaleurs de la norme des 6 premiers modes propres POD en écoulement non contrôlé ( $\gamma = 0$ ).

**Pression nulle** Ce terme s’annule sur toutes les frontières où la pression de référence  $p$  est égale à zéro<sup>32</sup>. Ceci est couramment le cas sur la frontière d’entrée,  $\Gamma_e$ , du domaine de calcul. Parfois, cette condition est appliquée sur la frontière de sortie pour des écoulements cisailés (Deane *et al.*, 1991; Karniadakis *et al.*, 1991). Des précautions doivent néanmoins être prises. Il convient notamment de vérifier que la frontière de sortie est située assez loin du lieu de naissance des tourbillons.

**Conditions aux limites homogènes** Le terme de pression s’annule sur les frontières où des conditions aux limites homogènes peuvent être obtenues pour les fonctions de base  $\Phi_i$ , *i.e.*  $\Phi_i = \mathbf{0}$ . C’est le cas, par exemple, de domaines d’écoulements possédant des frontières rigides (Fahl, 2000, dans le cas d’une cavité). Dans notre étude, la frontière du cylindre  $\Gamma_c$  satisfait cette condition pour un écoulement non contrôlé.

**Conditions aux limites périodiques** Lorsque des conditions aux limites périodiques sont appliquées sur les frontières du domaine de calcul, le terme de pression s’annule (Deane *et al.*, 1991). Pour un écoulement de canal simulé avec des conditions aux limites périodiques, le terme de pression a alors une contribution nulle.

<sup>32</sup>La pression de référence, fixée par les conditions initiales du problème, est arbitraire. Un choix  $p(\mathbf{x}) = 0$  est tout à fait possible.

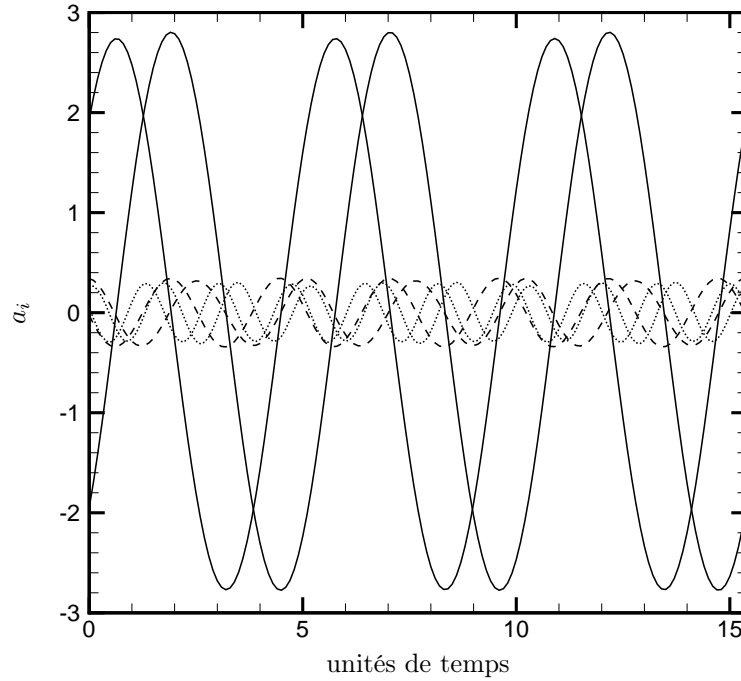


FIGURE 18 – Evolution temporelle des 6 premiers coefficients de projection en écoulement non contrôlé ( $\gamma = 0$ ). —  $a_1$  et  $a_2$ , - - -  $a_3$  et  $a_4$ ,  $\cdots$   $a_5$  et  $a_6$ .

**Frontières parallèles à l'écoulement** Ce terme s'annule également sur les frontières qui sont localement parallèles à l'écoulement car on a alors  $\Phi_i \cdot \mathbf{n} = 0$ . Cette condition est vérifiée sur les frontières  $\Gamma_{inf}$  et  $\Gamma_{sup}$  de notre configuration. En cas d'application du contrôle sur le cylindre, cette condition est également vérifiée sur la frontière  $\Gamma_c$ .

**Conditions aux limites "naturelles"** La combinaison du terme de pression  $-[p \Phi_i]$  et du terme de vitesse  $\frac{1}{Re}[(\nabla \otimes \mathbf{u})\Phi_i]$ , peut s'annuler. Cette combinaison est principalement effectuée sur la frontière de sortie où l'on impose les conditions aux limites suivantes (Sani et Gresho, 1994; Ravindran, 2000a) :

$$-p + \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ces conditions, très utilisées en éléments finis (Ravindran, 1999), sont censées laisser sortir librement les tourbillons du domaine de calcul. Cependant, par leur manque de justifications physiques, ces conditions n'ont pas été utilisées dans nos travaux. Des conditions aux limites de type non-réfléctif (Jin et Braza, 1993) ont été utilisées à la place afin de réduire la taille du maillage utilisé pour la discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes (Cordier et Bergmann, 2002b).

Dans nos différentes études sur le cylindre (Bergmann *et al.*, 2005; Bergmann et Cordier, 2006), le terme  $-[p \Phi_i]$  s'annule sur toutes les frontières du domaine de calcul, excepté sur la frontière de sortie  $\Gamma_s$ . Bien que la contribution de ce terme soit très importante pour la stabilité du système dynamique d'ordre réduit (Noack *et al.*, 2003, 2004), ce terme sera négligé dans un premier temps. Une erreur est alors commise dans la construction du système dynamique. Néanmoins, cette erreur peut être compensée *a posteriori* par une méthode de calibration décrite à la section 3.4.2.

On considère alors l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \left( \Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= -\frac{1}{Re} \left( (\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \mathbf{u} \right) \\ &+ \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \Phi_i]. \end{aligned} \quad (52)$$

L'introduction du développement (49) dans l'équation (52) donne le système dynamique suivant :

$$\frac{d a_i(t)}{d t} = \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t), \quad (53)$$

muni de la condition initiale

$$a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t=0), \Phi_i(\mathbf{x})) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_{gal}.$$

Les coefficients  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  intervenant dans le système dynamique (53) s'écrivent :

$$\mathcal{A}_i = -(\Phi_i, (\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_m) - \frac{1}{Re} \left( (\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \mathbf{u}_m \right) + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}_m) \Phi_i],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ij} &= -(\Phi_i, (\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \Phi_j) - (\Phi_i, (\Phi_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_m) - \frac{1}{Re} \left( (\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \Phi_j \right) \\ &+ \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \Phi_j) \Phi_i], \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}_{ijk} = -(\Phi_i, (\Phi_j \cdot \nabla) \Phi_k).$$

### 3.3.2 Incorporation du contrôle dans le modèle POD

La méthode générale est identique à celle présentée au paragraphe précédent. Les seules différences sont :

- la méthode de la fonction de contrôle est mise en œuvre : la décomposition (50) est utilisée afin de prendre en compte le contrôle dans le système POD.
- le champ moyen est calculé de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) - \gamma(t_i) \mathbf{u}_c(\mathbf{x})).$$

Le modèle réduit représentatif de l'écoulement contrôlé peut finalement s'écrire pour  $i = 1, \dots, N_{gal}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d a_i(t)}{d t} &= \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ &+ \mathcal{D}_i \frac{d \gamma}{d t} + \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma + \mathcal{G}_i \gamma^2. \end{aligned} \quad (54a)$$

Ces équations sont munies de la condition initiale

$$a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \Phi_i(\mathbf{x})). \quad (54b)$$

Des termes supplémentaires  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  interviennent dans le système (54). Ces termes dépendent de la fonction de contrôle,  $\mathbf{u}_c$ , et s'écrivent :

$$\mathcal{D}_i = -(\Phi_i, \mathbf{u}_c),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -(\Phi_i, (\mathbf{u}_c \cdot \nabla) \mathbf{u}_m) - (\Phi_i, (\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_c) - \frac{1}{Re} ((\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \mathbf{u}_c) \\ &\quad + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}_c) \Phi_i], \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{ij} = -(\Phi_i, (\Phi_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_c) - (\Phi_i, (\mathbf{u}_c \cdot \nabla) \Phi_j),$$

$$\mathcal{G}_i = -(\Phi_i, (\mathbf{u}_c \cdot \nabla) \mathbf{u}_c).$$

### 3.4 Intégration et calibration du modèle d'ordre faible

#### 3.4.1 Intégration temporelle du système POD

Afin de déterminer des fonctions de base POD susceptibles de décrire au mieux la dynamique contrôlée du cylindre, nous construisons une base de données qui correspond à l'écoulement généré en faisant osciller sinusoidalement le cylindre avec une vitesse tangentielle  $\gamma(t) = A \sin(2\pi St_f t)$ , d'amplitude égale à  $A = 2$  et de nombre de Strouhal égal à  $St_f = 0,5$ .

La matrice de corrélation  $C$  est formée à partir d'un jeu de  $N_{POD} = 361$  réalisations de l'écoulement manipulé obtenues à des intervalles de temps espacées régulièrement sur 18 unités de temps ( $\Delta t = 0,05$ ).

La figure 19 représente les modules des 6 premiers modes POD. Les deux premiers modes (figures 19(a) et 19(b)) ont globalement des structures semblables aux modes correspondants obtenus en écoulement non contrôlé (figures 17(a) et 17(b)), excepté autour du cylindre, où la dynamique est modélisée principalement par les modes 3 et 4. Les modes 5 et 6 correspondent à des corrections apportées aux modes précédents afin de modéliser la dynamique contrôlée.

La figure 20 représente l'évolution du contenu énergétique des  $M$  premiers modes POD en utilisant comme mode de représentation le contenu informationnel relatif,  $RIC$ , défini par

$$RIC(M) = \frac{\sum_{k=1}^M \lambda_k}{N_{POD}}. \quad (55)$$

On constate sur la figure 21 que les 8 premiers modes (soit moins de 4% du nombre total de modes POD) contiennent plus de 99,9% de l'énergie cinétique de l'écoulement. Les 14 premiers modes contiennent plus de 99,98% de cette même énergie. En raison des faibles coûts de calcul intervenant dans la résolution du système POD ROM, dans ce qui suit,  $N_{gal} = 14$  modes seront retenus dans le système dynamique réduit (54).

Par la suite, le système d'équations (54) est intégré en temps par une méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 avec un pas de  $10^{-2}$ . La solution de ce système donne un jeu de coefficients de prédiction temporels  $a_n(t)$  qui peuvent être comparés avec les coefficients de projection temporels  $a_{\tau n}(t)$ . Les évolutions temporelles des 6 premiers coefficients  $a_n(t)$  et  $a_{\tau n}(t)$  sont représentées sur la figure 22.

On constate qu'il y a une légère amplification temporelle des modes propres prédits par le système dynamique d'ordre faible, accompagnée d'un léger déphasage. Cette constatation est appuyée par le fait que le contenu informationnel relatif des modes prédits  $a_n(t)$  est en moyenne bien plus important que celui des modes projetés  $a_{\tau n}(t)$ , comme l'illustre la figure 23. Il faut cependant tenir compte du fait que l'échelle utilisée sur cette figure est de type logarithmique. Le maximum de l'erreur commise ne se situe pas au niveau des modes d'ordre élevé comme pourrait le laisser penser la figure 23. La figure 24 représente l'erreur entre les modes prédits  $a_n(t)$  et les modes projetés  $a_{\tau n}(t)$  en norme infinie<sup>33</sup>. La méthode d'intégration du système

<sup>33</sup>Par définition,  $\|y_i(t)\|_\infty = \max_t |y_i(t)|$  où  $i = 1, \dots, N_{gal}$  est le numéro d'ordre des modes POD.



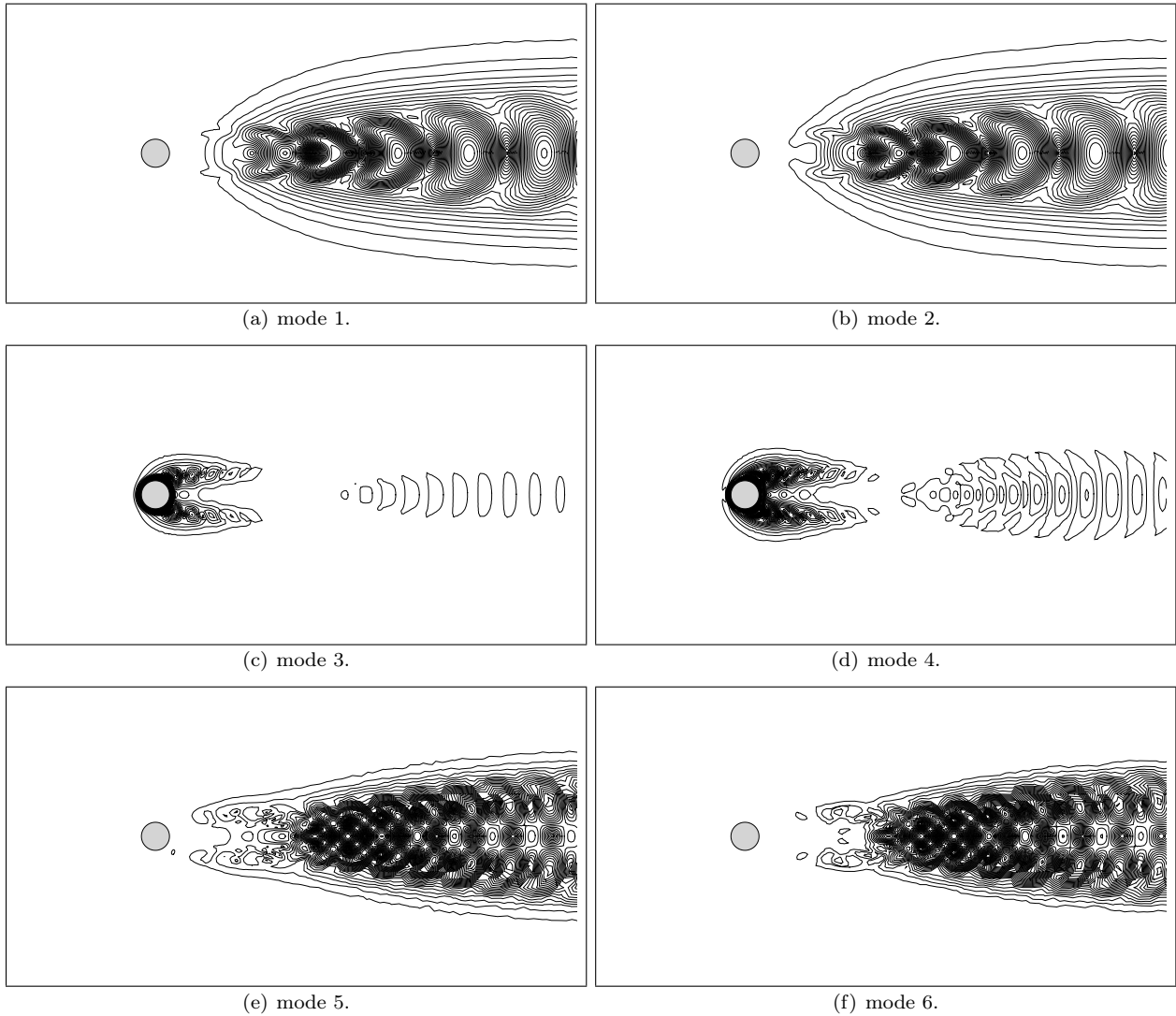


FIGURE 19 – Isovaleurs de la norme des 6 premiers modes propres POD en écoulement manipulé :  $\gamma(t) = A \sin(2\pi St_f t)$  avec  $A = 2$  et  $St_f = 0,5$ .

dynamique est très performante, et de ce fait, l'erreur de reconstruction ne peut pas provenir d'une mauvaise intégration. Une des raisons pour laquelle ces erreurs de reconstruction apparaissent, provient du fait que les termes contenant le champ de pression ont été négligés sur la frontière de sortie dans la construction du système dynamique (54).

Cette amplification peut s'avérer très néfaste, notamment dans le cas où ce système serait utilisé comme système d'état dans un processus de contrôle optimal. Dans ce cas, les équations d'état devraient être d'une très grande précision car elles modélisent la physique des phénomènes mis en jeu. Il paraît donc indispensable d'apporter des améliorations à ce système.

### 3.4.2 Calibration du système d'ordre faible

On se propose ici d'optimiser le système d'ordre faible afin de restituer au mieux l'information contenue sur chaque mode et cela à chaque instant.

La divergence de la solution du système dynamique (54) peut provenir de l'erreur commise en négligeant le terme de pression sur la frontière de sortie lors de la construction des coefficients intervenant dans le système réduit. Une autre explication, plus probable, peut également être avancée. Les fonctions de base POD retenues pour construire un modèle réduit de dynamique sont représentatives des caractères énergétiques dominants d'un écoulement, générés par les grosses et moyennes structures. Les plus petites structures sont, quant à elles,

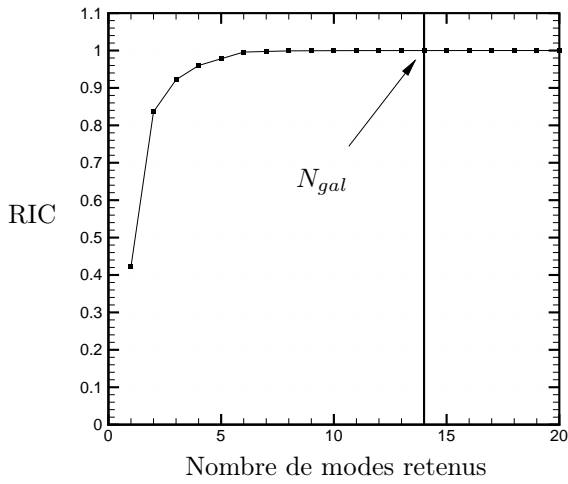


FIGURE 20 – Énergie cinétique relative en fonction du nombre de modes POD retenus.

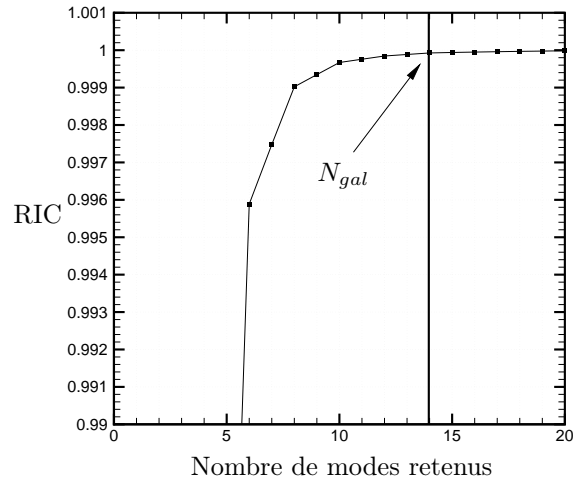


FIGURE 21 – Énergie cinétique relative en fonction du nombre de modes POD retenus (zoom).

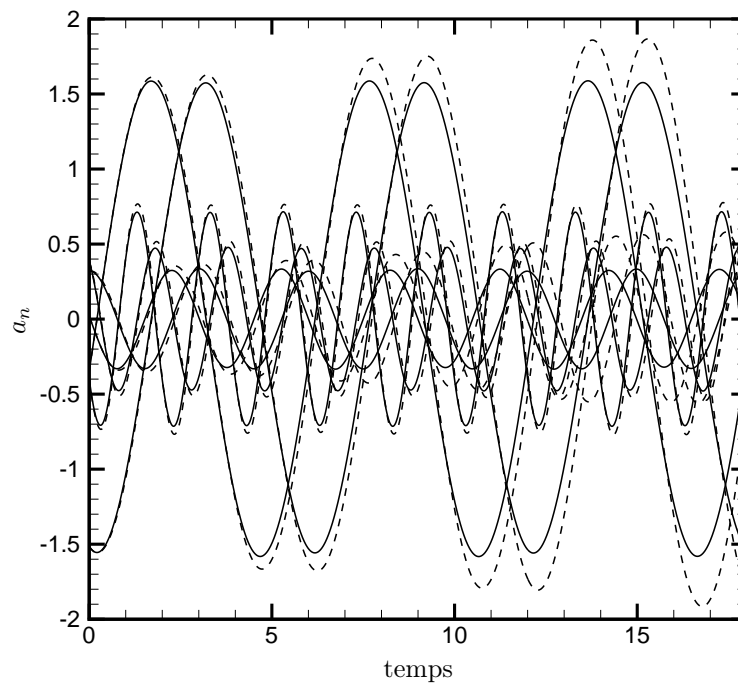


FIGURE 22 – Comparaison de l'évolution temporelle des 6 premiers modes propres projetés (—) et prédits (---).

négligées du fait de leur faible apport énergétique (inférieur à 0,1% de l'énergie totale pour  $N_{gal} = 14$ ). Or, la dissipation visqueuse s'effectue principalement dans les petites structures de l'écoulement. Par conséquent, le système POD ne dissipe pas assez d'énergie et les modes prédits s'amplifient au cours du temps (voir figure 22). Il convient donc de modéliser les interactions<sup>34</sup> entre les modes calculés (grandes échelles) et les

<sup>34</sup>Récemment, Couplet *et al.* (2003) ont analysé les transferts d'énergie entre modes POD d'un écoulement turbulent de marche descendante. Ils ont montré, que comme c'est le cas en turbulence pour les modes de Fourier, les échanges d'énergie étaient locaux

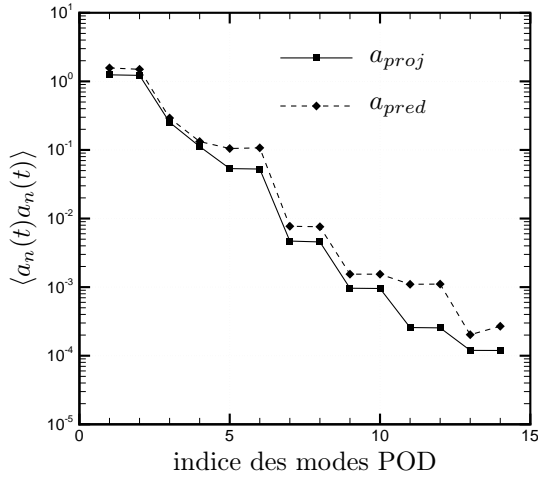


FIGURE 23 – Comparaison du contenu énergétique de chaque mode POD estimé respectivement avec les coefficients de projection (POD) et les coefficients de prédiction (POD ROM).

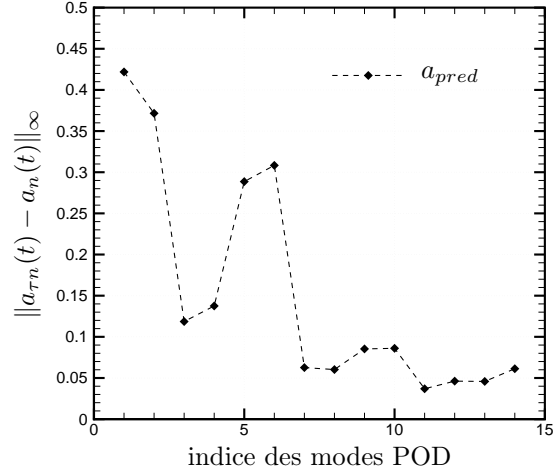


FIGURE 24 – Erreur en norme infinie du contenu énergétique de chaque mode POD.

modes non résolus (petites échelles). Le problème est similaire à celui rencontré en simulations aux grandes échelles (*Large Eddy Simulation*) pour lesquelles une échelle de coupure est introduite, échelle qui sépare les structures explicitement calculées et celles qui doivent être modélisées. Dans le cas du système réduit POD, cette échelle de coupure, représentée sur la figure 25, est confondue avec le nombre de modes Galerkin retenu dans le système. En s’inspirant encore une fois de la turbulence, une modélisation naturelle d’interactions consiste à ajouter des viscosités artificielles dans le système dynamique POD afin de le rendre plus dissipatif.

**Revue des méthodes d’amélioration du système POD ROM** Comme il a été discuté ci-dessus, ajouter des viscosités artificielles au système POD ROM semble une méthode prometteuse pour améliorer la représentativité du modèle réduit.

La méthode la plus évidente est d’ajouter une viscosité globale dans le système POD ROM. Ainsi, la viscosité  $\nu$  du système POD, représentée par l’inverse du nombre de Reynolds, sera remplacée par  $\nu + \nu_{\tau}$ , où, par analogie avec la turbulence,  $\nu_{\tau}$  est une viscosité tourbillonnaire à déterminer. La viscosité  $\nu$  est donc multipliée par un facteur correctif  $(1 + c)$  où  $c$  est une constante qu’il reste à évaluer. Concrètement, cela revient à remplacer dans le système POD ROM, le terme  $\frac{1}{Re}$  par  $\frac{1 + c}{Re}$ .

Rempfer et Fasel (1994) puis Rempfer (1996) prolongent cette idée et considèrent que chaque mode propre dissipe une certaine quantité d’énergie. Selon eux, il est donc préférable d’ajouter une viscosité tourbillonnaire différente sur chacun des modes POD. Ainsi, en conservant le formalisme précédent, et en supposant que  $\nu_i$  est la viscosité contenue sur le  $i$ -ème mode, la viscosité totale sur le  $i$ -ème mode devient  $\nu_i = \nu \times (1 + c_i)$ , ce qui revient encore à remplacer  $1/Re$  dans le système POD ROM par  $(1 + c_i)/Re$ . Rempfer considère que cette viscosité tourbillonnaire, prise en compte par l’intermédiaire du terme  $c_i$ , varie comme une fonction linéaire des modes POD, soit :  $c_i = K \times i$  où  $K$  est une constante à déterminer.

Cazemier (1997) et Cazemier *et al.* (1998) utilisent des équations de transport de l’énergie cinétique modale afin de déterminer les viscosités à ajouter au système POD ROM pour le stabiliser. Cazemier suppose que l’absence d’interaction avec les modes non-résolus se traduit sur le système par une croissance linéaire des coefficients de prédiction temporels. Pour éviter ce problème, Cazemier ajoute alors un terme d’amortissement linéaire dans le système. Le système POD ainsi construit s’écrit :

---

et étaient globalement dissipatifs.

$$\frac{da_i}{dt} = \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_j + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_j a_k + \mathcal{H}_i a_i.$$

L'énergie contenue dans la direction  $\Phi_i$ , par le  $i$ -ème mode, est  $a_i^2$ . La dérivée temporelle de l'énergie du mode  $i$  est alors :

$$\frac{da_i^2}{dt} = 2 a_i \frac{da_i}{dt}.$$

L'équation de transport de l'énergie s'écrit donc :

$$\frac{da_i^2}{dt} = 2\mathcal{A}_i a_i + 2 \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_i a_j + 2 \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_i a_j a_k + 2\mathcal{H}_i a_i a_i.$$

En moyenne l'énergie doit se conserver *i.e.*  $\left\langle \frac{da_i^2}{dt} \right\rangle = 0$ . On a donc :

$$2\mathcal{A}_i \langle a_i \rangle + 2 \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} \langle a_i a_j \rangle + 2 \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} \langle a_i a_j a_k \rangle + 2\mathcal{H}_i \langle a_i a_i \rangle = 0.$$

Si la solution du système POD ROM est sur l'attracteur du système dynamique alors les propriétés de la POD imposent que  $\langle a_i a_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}$  et que  $\langle a_i \rangle = 0$ .

Soit :

$$\sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} \langle a_i a_j a_k \rangle + \lambda_i \mathcal{B}_{ii} + \lambda_i \mathcal{H}_i = 0.$$

Finalement, on obtient :

$$\mathcal{H}_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} \langle a_i a_j a_k \rangle - \mathcal{B}_{ii}.$$

Vigo (1998), dans le cas d'un écoulement compressible, propose une méthode d'amortissement en ajoutant un terme cubique dans le système POD ROM. Cette méthode semble assez performante, mais alourdi considérablement les coûts de calcul numériques associés à la résolution du système.

Enfin, très récemment, Sirisup et Karniadakis (2004) ont adapté un modèle particulier de viscosité spectrale dénommé *Spectral Vanishing Viscosity Model* en simulation aux grandes échelles, afin d'améliorer la représentativité d'un modèle réduit de dynamique de sillage sur une très longue période (plus de 1000 périodes de Von Kármán).

**Calibration optimale du système POD ROM** On propose ici de déterminer les viscosités tourbillonnaires à ajouter sur chacun des modes POD et cela de manière optimale.

En séparant les termes visqueux et les termes non-visqueux, les coefficients du système dynamique (54) peuvent formellement s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= A_i + \frac{1}{Re} \tilde{\mathcal{A}}_i, & \mathcal{B}_{ij} &= B_{ij} + \frac{1}{Re} \tilde{\mathcal{B}}_{ij}, & \mathcal{C}_{ijk} &= C_{ijk}, \\ \mathcal{D}_i &= D_i, & \mathcal{E}_i &= E_i + \frac{1}{Re} \tilde{\mathcal{E}}_i, & \mathcal{F}_{ij} &= F_{ij} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_i = G_i. \end{aligned}$$

L'optimisation du système POD est donc effectuée en ajoutant une "viscosité tourbillonnaire"  $\frac{\alpha_i}{Re}$  au niveau du  $i$ -ème mode. On obtient alors le système dynamique suivant :

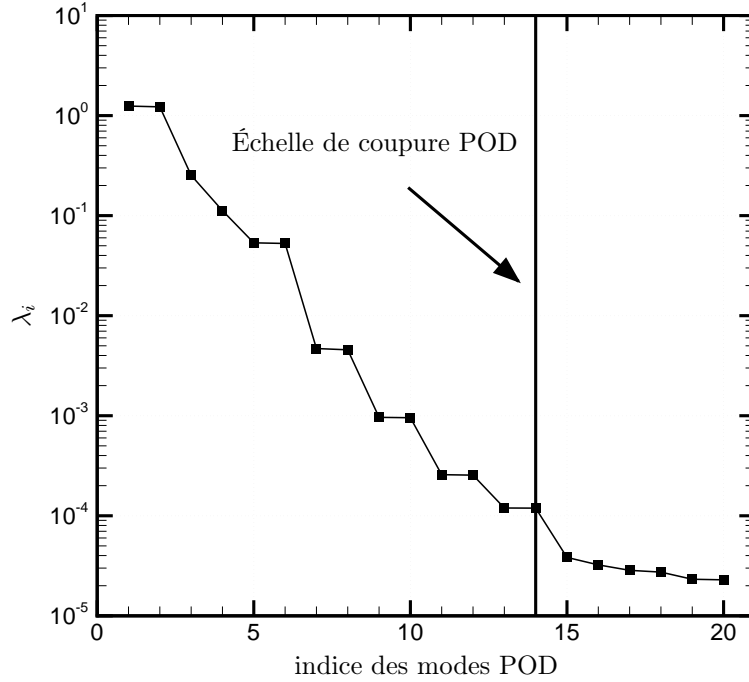


FIGURE 25 – Spectre énergétique et échelle de coupure POD.

$$\begin{aligned}
\frac{da_i(t)}{dt} = & A_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} B_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} C_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\
& + D_i \frac{d\gamma}{dt} + \left( E_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} F_{ij} a_j(t) \right) \gamma + G_i \gamma^2 \\
& + \frac{1 + \alpha_i}{Re} \left( \tilde{\mathcal{A}}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \tilde{\mathcal{B}}_{ij} a_j(t) + \tilde{\mathcal{E}}_i \gamma \right).
\end{aligned} \tag{56}$$

En passant tous les termes de ce système au membre de gauche, ce système s'écrit encore :

$$\mathcal{N}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}. \tag{57}$$

On cherche alors à déterminer de manière optimale les viscosités tourbillonnaires  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, N_{gal}$ , éventuellement dépendantes du temps, telles que les erreurs de reconstruction obtenues par intégration du système POD (56) soient minimisées.

L'idée est alors d'approcher, au sens des moindres carrés, les coefficients de projection  $a_{\tau n}(t)$  (issus de la simulation numérique) par les coefficients de prédiction  $a_n(t)$  (calculés par le système dynamique POD ROM).

L'objectif est alors de minimiser la fonction suivante<sup>35</sup> :

$$\mathcal{J}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\ell}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{gal}} (a_i - a_{\tau i})^2 dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{gal}} \alpha_i^2 dt. \tag{58}$$

<sup>35</sup>Les coefficients de projection sont interpolés aux pas de la résolution du système POD à l'aide de fonctions splines.

Les cibles ('target')  $a_\tau$  représentent les coefficients de projection temporels.

Le second terme de la fonctionnelle objectif (58) n'est ni physiquement ni économiquement important. Cependant, il est conservé afin de s'affranchir de tout problème de régularisation numérique et d'obtenir un problème d'optimisation bien posé.

La méthode d'amélioration du système POD proposée se ramène donc à un problème d'optimisation avec contraintes. On veut minimiser la fonctionnelle objectif (58) sous la contrainte du système POD (dit système d'état) (56) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_{gal}}} \mathcal{J}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) \\ s.t. \\ \mathcal{N}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (59)$$

L'introduction de multiplicateurs de Lagrange  $\xi_i$  pour  $i = 1, \dots, N_{gal}$  permet de transformer le problème d'optimisation avec contraintes (59) en un problème d'optimisation sans contrainte, qui peut être résolu efficacement à l'aide de méthodes adjointes décrites dans Gunzburger (1997a). Pour cela, une nouvelle fonctionnelle objectif  $\mathcal{L}$ , dite fonctionnelle de Lagrange, est introduite :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{J}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) - \left\langle \sum_{i=1}^{N_{gal}} \xi_i, \mathcal{N}_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) \right\rangle \\ &= \mathcal{J}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) - \sum_{i=1}^{N_{gal}} \int_0^T \xi_i(t) \mathcal{N}_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) dt. \end{aligned} \quad (60)$$

Le problème consiste maintenant à rendre la fonctionnelle de Lagrange (60) stationnaire. On cherche donc  $\delta\mathcal{L} = 0$ , soit :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_i} \delta a_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \xi_i} \delta \xi_i = 0.$$

Les variables  $a$ ,  $\alpha$  et  $\xi$  étant supposées indépendantes, on a alors :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_i} \delta a_i = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \xi_i} \delta \xi_i = 0.$$

L'annulation de la dérivée de Fréchet par rapport aux variables adjointes donne l'équation d'état  $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$ .

Les équations adjointes sont obtenues en annulant la dérivée de Fréchet par rapport aux variables d'état  $a_n$ . Le système d'équations différentielles ordinaires suivant est alors obtenu :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i(t)}{dt} &= - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \xi_j B_{ji} - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \xi_j (C_{jik} + C_{jki}) a_k \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \xi_j F_{ji} \gamma - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \frac{1 + \alpha_j}{Re} \xi_j \tilde{\mathcal{B}}_{ji} - \ell(a_i - a_{\tau i}). \end{aligned} \quad (61a)$$

Ce système est muni de la condition terminale

$$\xi_i(T) = 0, \quad \forall i. \quad (61b)$$

La condition d'optimalité du premier ordre est obtenue en annulant la dérivée de Fréchet par rapport aux paramètres de contrôle  $\alpha_i$ .

Quand  $\alpha_i = Cste_i$  (indépendant du temps), la condition d'optimalité s'écrit :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \alpha_i} = \int_0^T \left( \beta \alpha_i + \frac{1}{Re} \left( \tilde{\mathcal{A}}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \tilde{\mathcal{B}}_{ij} a_j + \tilde{\mathcal{E}}_i \gamma \right) \xi_i \right) dt, \quad (62)$$

et quand  $\alpha_i = f_i(t)$ , cette même condition s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_i}(t) = \beta \alpha_i(t) + \frac{1}{Re} \left( \tilde{\mathcal{A}}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \tilde{\mathcal{B}}_{ij} a_j + \tilde{\mathcal{E}}_i \gamma \right) \xi_i. \quad (63)$$

La condition d'optimalité, condition nécessaire du premier ordre, conduit à un système d'équations différentielles couplées (constitué du système d'état 56, du système adjoint 61 et d'une des conditions d'optimalité 62 ou 63) appelé système optimal. Pour limiter les coûts de calcul, un processus de résolution itératif, décrit par l'algorithme 1, peut être utilisé.

### Algorithme 1 (Calibration optimale d'un système d'ordre réduit POD)

*Initialisation des viscosités tourbillonnaires  $\alpha^{(0)} = \mathbf{0}$ .  $n = 0$ .*

1. *Résolution des équations d'état (56) de 0 à  $T$  avec le dernier  $\alpha^{(n)}$  déterminé. Obtention de  $\mathbf{a}^{(n)}$ .*
2. *Résolution des équations adjointes (61) de  $T$  à 0 avec  $\alpha^{(n)}$  et  $\mathbf{a}^{(n)}$ . Obtention de  $\xi^{(n)}$ .*
3. *Calcul de la condition d'optimalité (62) ou (63) avec  $\alpha^{(n)}$ ,  $\mathbf{a}^{(n)}$  et  $\xi^{(n)}$ . Obtention de  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}$ .*
4. *A partir de cette estimation, calcul de nouvelles viscosités :*

(a) *si  $\alpha$  est constant*

$$\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} + \omega^{(n)} \mathbf{d}^{(n)},$$

(b) *si  $\alpha$  dépend du temps*

$$\alpha^{(n+1)}(t) = \alpha^{(n)}(t) + \omega^{(n)} \mathbf{d}^{(n)}(t).$$

*$\mathbf{d}$  est une direction de descente déterminée par un algorithme d'optimisation laissé au choix de l'utilisateur, et  $\omega$  est le pas à effectuer le long de cette direction.*

5. *Si un test de convergence est vérifié, l'algorithme est arrêté. Dans le cas contraire, incrémentation  $n = n + 1$  et retour à l'étape 1.*

Dans cette étude, la direction de descente  $\mathbf{d}$  et le pas  $\omega$ , apparaissant à l'étape 4 de l'algorithme 1, sont respectivement déterminés par une méthode de gradient conjugué de type Fletcher-Reeves et par une méthode d'Armijo à rebroussement<sup>36</sup> (Nocedal et Wright, 1999).

La figure 26 représente l'évolution de la fonctionnelle coût au cours<sup>37</sup> du processus itératif de résolution des systèmes optimaux construits respectivement avec les conditions d'optimalité (62) pour  $\alpha_i = Cste_i$  et (63) pour  $\alpha_i = f_i(t)$ . La méthode utilisant  $\alpha_i = f_i(t)$  permet de réduire plus sensiblement la valeur de la fonction objectif. La fonctionnelle passe d'une valeur égale à 1,121 sans viscosités tourbillonnaires à des valeurs respectives de 0,0052 et 0,193 pour  $\alpha_i = f_i(t)$  et  $\alpha_i = Cste_i$  en fin du processus d'optimisation, soit respectivement après 4000 itérations et 400 itérations. Cependant, le flot décrit en (54) n'est plus autonome, et une stabilisation sur une période supérieure à la période utilisée pour construire le système POD ROM n'est pas envisageable, contrairement au cas où  $\alpha_i = Cste_i$ .

Les valeurs des viscosités tourbillonnaires optimales pour les  $N_{gal} = 14$  modes POD retenus dans le cas  $\alpha_i = Cste_i$  sont représentées sur la figure 27. La figure 28 représente l'évolution temporelle des viscosités tourbillonnaires optimales ajoutées sur les 6 premiers modes POD dans le cas  $\alpha_i = f_i(t)$ . La résolution du système dynamique POD ROM après introduction de ces viscosités tourbillonnaires, donne un jeu optimal de coefficients de prédiction qui peuvent être comparés aux coefficients de projection.

Les figures 29 et 30 représentent une comparaison entre l'évolution temporelle des 6 premiers coefficients de projection  $a_{\tau n}(t)$ , et celle des 6 premiers coefficients  $a_n(t)$  obtenus par intégration du système POD ROM après introduction de viscosités tourbillonnaires  $\alpha_i = Cste_i$  d'une part et  $\alpha_i = f_i(t)$  d'autre part. En comparaison au cas non calibré  $\alpha_i = 0$ , une grande amélioration est apportée quand des viscosités  $\alpha_i = Cste_i$  sont ajoutées. Les modes stabilisés, avec  $\alpha_i = f_i(t)$ , sont, quant à eux, quasiment confondus avec les modes projetés.

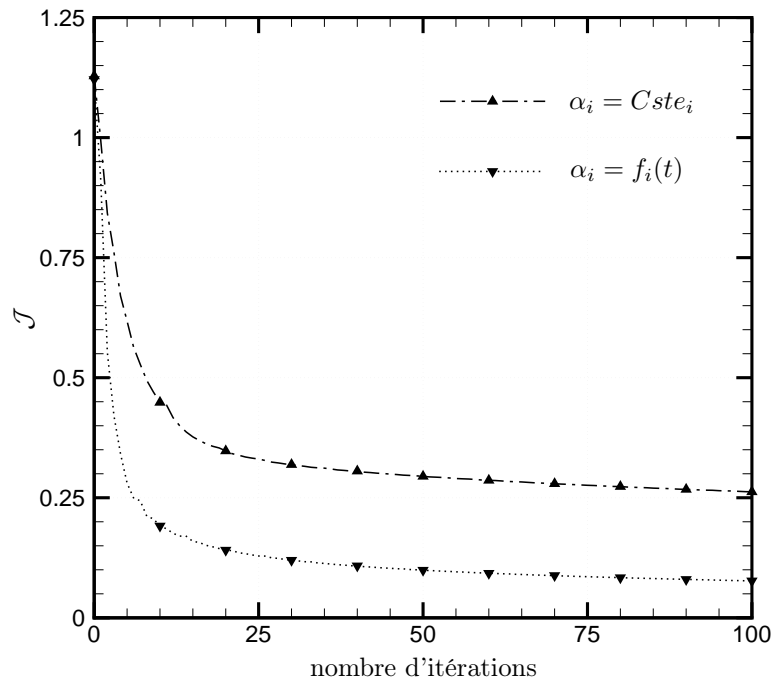
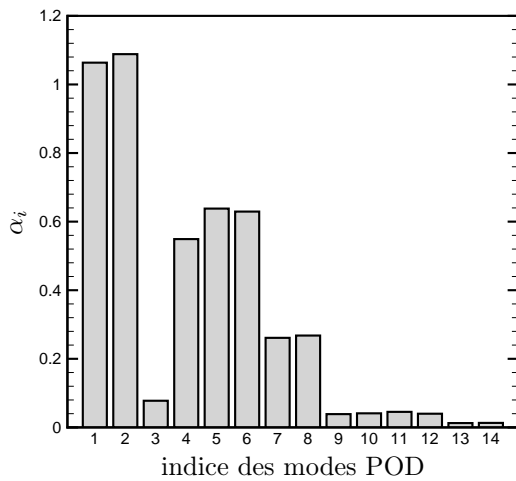
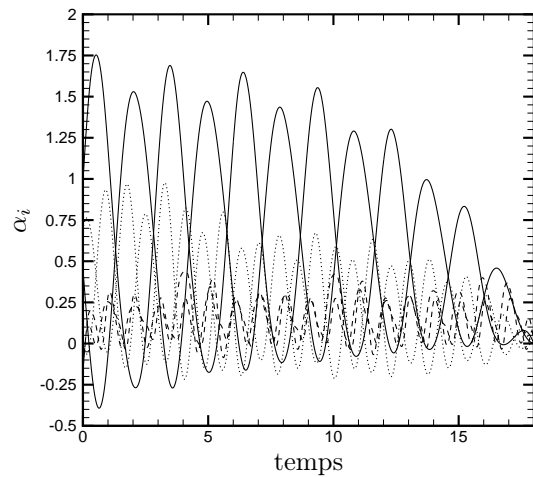


FIGURE 26 – Evolution de la fonctionnelle coût au cours du processus d'optimisation.

FIGURE 27 – Valeurs des viscosités tourbillonnaires à ajouter dans le cas  $\alpha_i = Cste_i$ .FIGURE 28 – Evolution temporelle des viscosités tourbillonnaires optimales ajoutées sur les 6 premiers modes POD pour  $\alpha_i = f_i(t)$ . traits pleins : modes 1 et 2; traits discontinus : modes 2 et 3; pointillés : modes 5 et 6.

La figure 31 représente une comparaison du contenu énergétique relatif de chaque mode POD. Ce contenu

<sup>36</sup>La méthode d'Armijo à rebroussement satisfait généralement la condition de Goldstein (Nocedal et Wright, 1999).

<sup>37</sup>Seules les 100 premières itérations sont représentées.



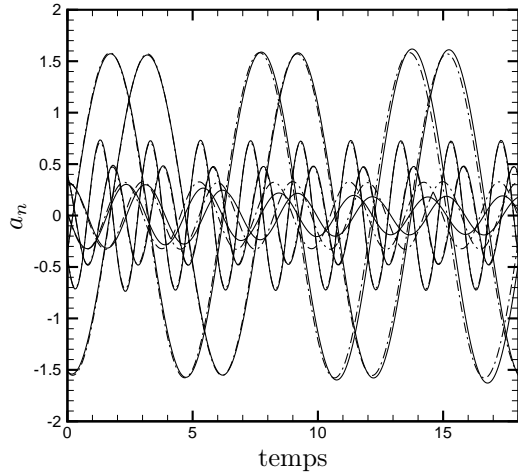


FIGURE 29 – Evolution temporelle des 6 premiers modes propres projetés (traits pleins) et prédits avec  $\alpha_i = Cste_i$  (discontinus).

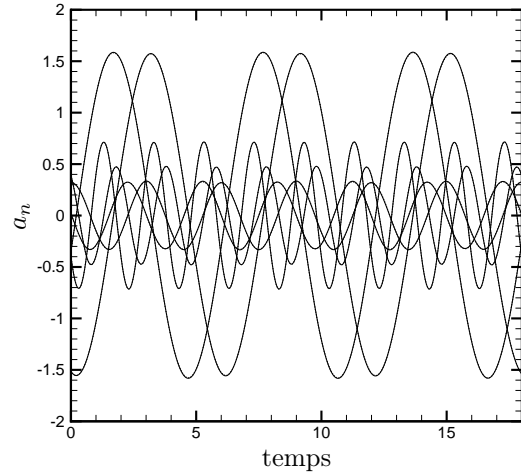


FIGURE 30 – Evolution temporelle des 6 premiers modes propres projetés (traits plein) et prédits avec  $\alpha_i = f_i(t)$  (pointillés).

peut être évalué soit avec les coefficients de projection  $a_{proj}(t) = a_{\tau n}(t)$ , soit avec les coefficients  $a_{pred}(t) = a_n(t)$  prédits par intégration du système POD ROM. Après introduction de viscosités tourbillonnaires, les deux contenus énergétiques (projection et prédiction) sont pratiquement identiques.

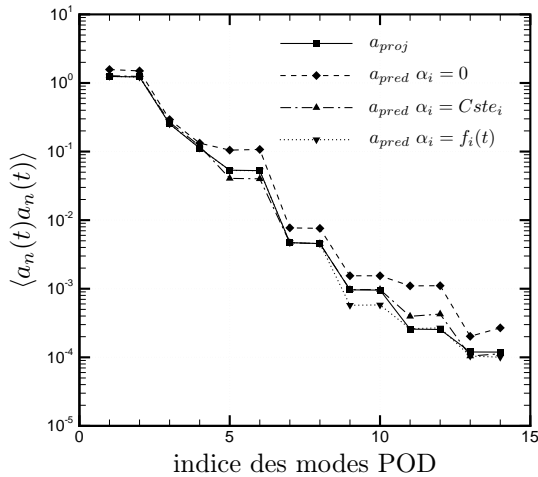


FIGURE 31 – Contenu énergétique de chaque mode POD. Estimation avec ajout et sans ajout ( $\alpha_i = 0$ ) de viscosités tourbillonnaires.

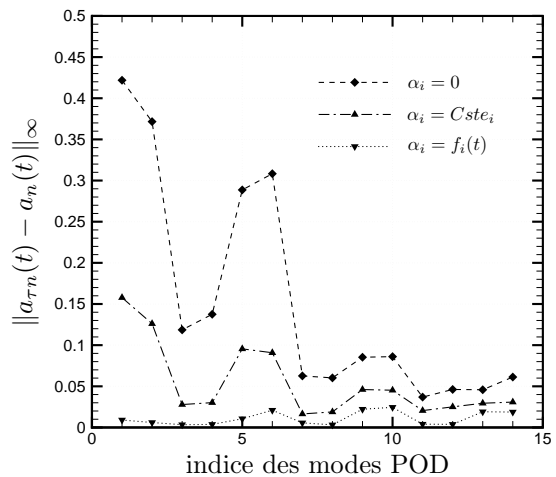


FIGURE 32 – Erreur en norme infinie du contenu énergétique de chaque mode POD. Estimation avec et sans ajout de viscosités tourbillonnaires.

L'erreur, en norme infinie, commise sur les contenus énergétiques obtenus par intégration du système POD ROM (avec et sans ajout de viscosités tourbillonnaires) est comparée sur la figure 32 à celle correspondant aux modes projetés. L'ajout de viscosités tourbillonnaires réduit considérablement l'erreur commise.

Le principal objectif d'un modèle d'ordre faible est d'approximer le plus fidèlement possible la solution d'un modèle détaillé, tout en conservant des coûts de calcul limités. Or, les coûts de calcul nécessaires à la résolution du système réduit sont très faibles en comparaison aux coûts équivalents associés à la résolution des équations de Navier-Stokes. Il reste donc à vérifier si les coefficients de prédiction, obtenus par résolution

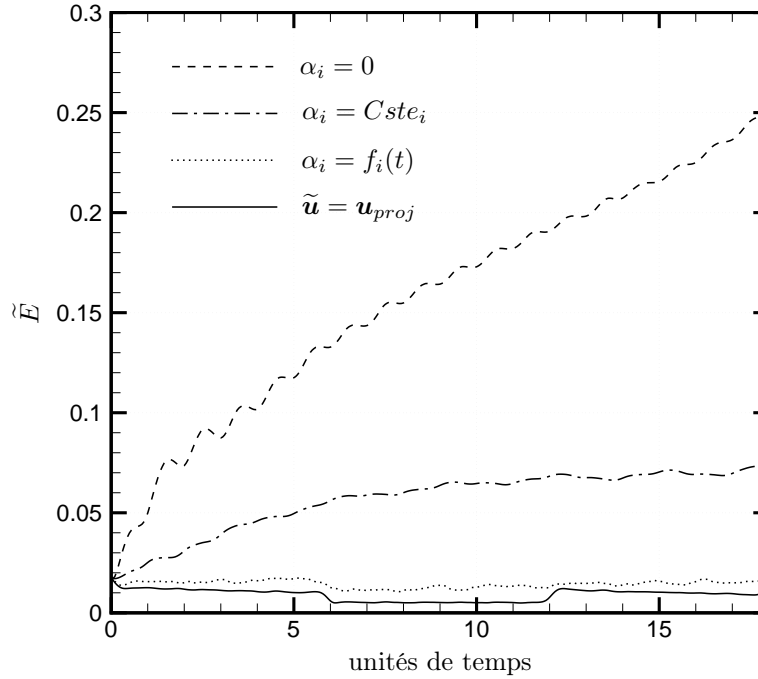


FIGURE 33 – Evolution temporelle de l'erreur commise sur la reconstruction des champs de vitesse par POD ROM pour différentes viscosités  $\alpha_i$  en comparaison de ceux déterminés par le modèle de Navier-Stokes.

du système POD ROM, sont efficaces pour reconstruire les champs de vitesse, solutions des équations de Navier-Stokes. L'erreur<sup>38</sup> de reconstruction suivante est de ce fait introduite :

$$\tilde{E}(t, \alpha) = \left( \int_{\Omega} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t, \alpha))^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (64)$$

Dans cette erreur, les champs de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t, \alpha)$  sont respectivement obtenus par résolution du modèle Navier-Stokes et par reconstruction en utilisant les coefficients<sup>39</sup> de prédiction du système POD ROM. La figure 33 représente l'évolution temporelle de l'erreur (64) pour les différentes viscosités tourbillonnaires  $\alpha_i$  possibles. L'erreur de reconstruction, pour le système POD ROM avec  $\alpha_i = 0$ , s'amplifie au cours du temps. Cette amplification est diminuée de manière importante lorsque des viscosités optimales déterminées pour  $\alpha_i = Cste_i$  sont ajoutées. Elle est même pratiquement éliminée lorsque l'on considère des viscosités déterminées pour  $\alpha_i = f_i(t)$ .

Les figures 34, 35 et 36 représentent respectivement pour  $\alpha_i = 0$ ,  $\alpha_i = Cste_i$  et  $\alpha_i = f_i(t)$ , les portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels  $a_n$ , obtenus d'une part par DNS et d'autre part par POD ROM. Sur ces figures, les coefficients  $a_i$  pour  $i = 1$  à 6 sont tracés en fonction du coefficient  $a_1$ . Les cycles limites qui correspondent au cas DNS ne sont pas retrouvés par intégration du système POD ROM sans stabilisation ( $\alpha_i = 0$ ). En effet, une amplification des coefficients (observée précédemment) se produit, et modifie l'orbite. Pour les cas optimaux obtenus avec  $\alpha_i = Cste_i$  et  $\alpha_i = f_i(t)$ , les cycles limites DNS sont parfaitement retrouvés par POD ROM.

La figure 37 présente les portraits de phase des 6 premiers coefficients  $a_n$  "anti-symétriques", obtenus dans les cas  $\alpha_i = 0$ ,  $\alpha_i = Cste_i$  et  $\alpha_i = f_i(t)$ , ainsi que ceux obtenus par DNS. L'ajout de viscosités tourbillonnaires

<sup>38</sup>L'erreur en norme  $L^2$  est choisie en raison de ses propriétés énergétiques.

<sup>39</sup>Ces coefficients dépendent naturellement du mode de calcul des viscosités tourbillonnaires.

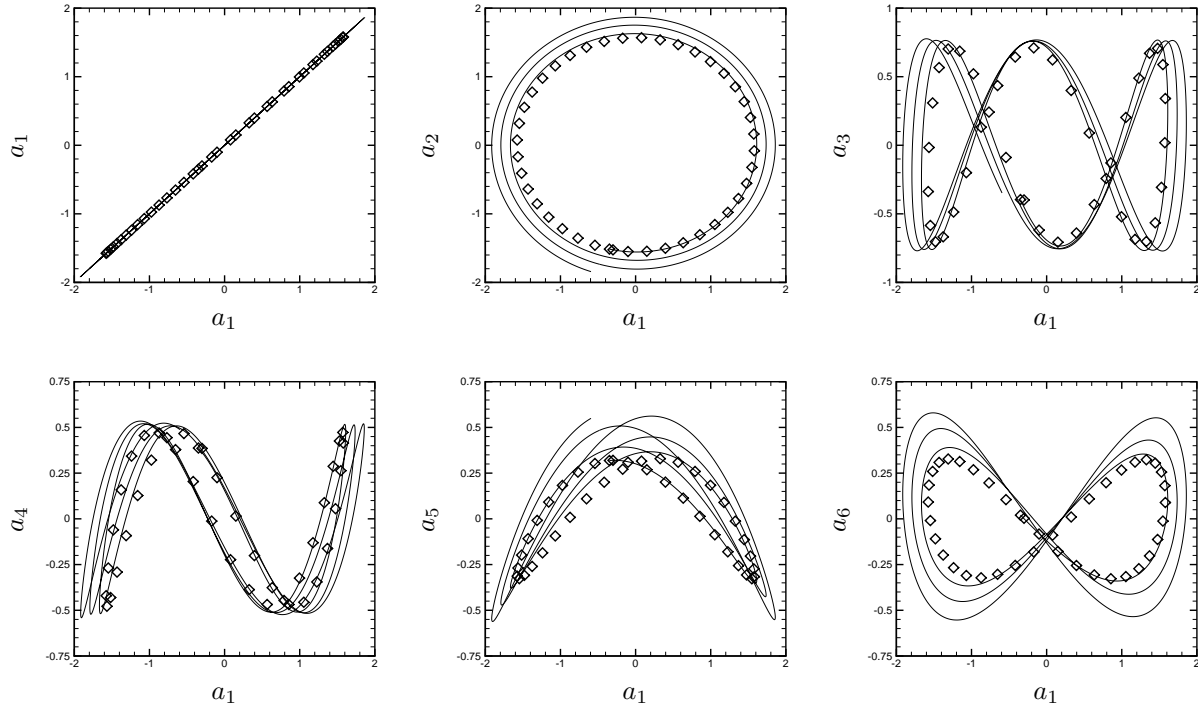


FIGURE 34 – Portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels  $a_n$  sur 18 unités de temps pour  $\alpha_i = 0$ .  $\diamond$  modes DNS; — modes POD.

optimales dans le modèle POD ROM permet de retrouver de manière assez précise la dynamique obtenue par résolution des équations de Navier-Stokes. L'ajout de viscosités dépendantes du temps ne permet malheureusement pas de reconstruire l'écoulement au delà de la période sur laquelle sont extraites les réalisations de l'écoulement. La résolution du système POD ROM sur des périodes bien plus longues que cette dernière est possible si l'on considère uniquement des viscosités constantes.

## 4 Conclusion

Dans ces notes, nous avons illustré la capacité des modèles réduits basés sur la POD à restituer de manière précise la dynamique ponctuelle d'un écoulement donné (à un nombre de Reynolds fixé), et ce, même en cas d'application du contrôle. Pour cela, nous avons vu qu'une méthode de calibration, décrite à la section 3.4.2, avait dû être développée. Cette méthode consiste à introduire de manière optimale des viscosités tourbillonnaires sur chaque mode du système POD. Ces viscosités, qui peuvent éventuellement dépendre du temps, permettent de modéliser les interactions des modes calculés par POD ROM avec les échelles non-résolues, échelles pour lesquelles s'effectue l'essentiel de la dissipation visqueuse. Il faut cependant noter que ces corrections dépendent de la configuration d'étude et ne sont pas "universelles". En d'autres termes, des calibrations du système devront être *a priori* effectuées pour chaque configuration d'étude (géométrie, nombre de Reynolds, paramètre de contrôle, ...).

L'intérêt de ces modèles réduits construits sur base POD est qu'ils permettent de reproduire la dynamique temporelle d'un modèle initial de grande dimension pour des coûts numériques négligeables. Les modèles réduits POD peuvent alors être utilisés comme équations d'état dans des procédures de contrôle robuste (Atwell, 2000) ou optimal (Bergmann *et al.*, 2005; Bergmann et Cordier, 2006) permettant de résoudre des problèmes d'optimisation ou de contrôle actif pour des configurations complexes d'écoulement à des coûts numériques abordables. Cependant, la robustesse des modèles réduits POD aux variations des paramètres de contrôle du système est difficile à évaluer *a priori*, même si de premières études sur l'évaluation des erreurs commencent à apparaître (Homescu *et al.*, 2003). Par conséquent, il est nécessaire d'utiliser des stratégies particulières (méthodes à région de confiance par exemple) pour s'assurer que la solution obtenue à partir du modèle réduit

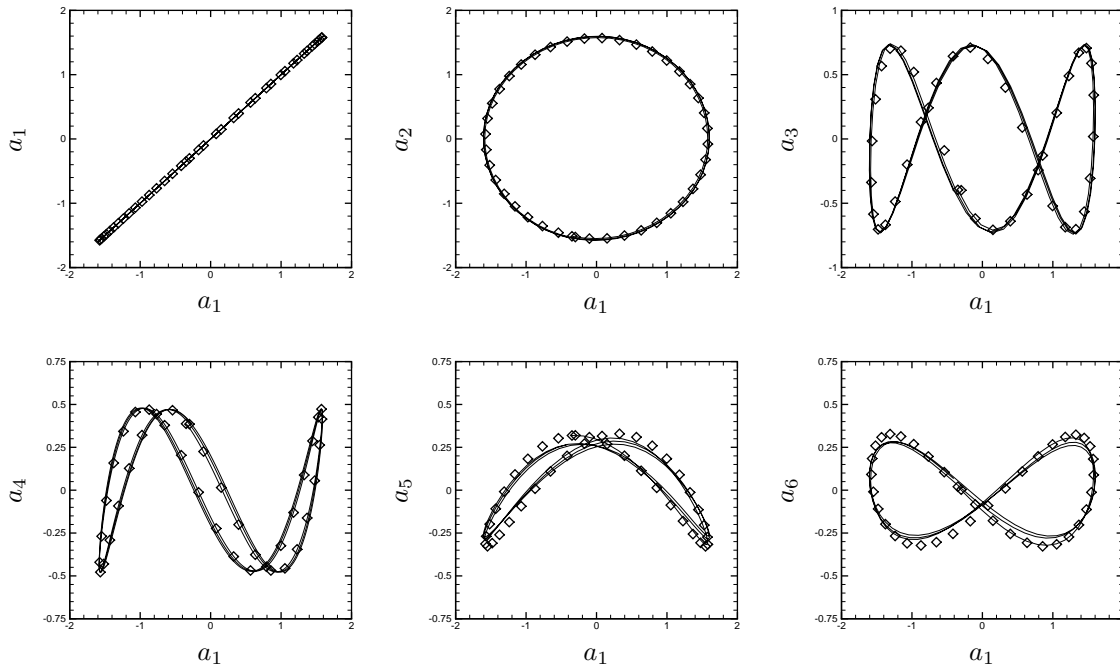


FIGURE 35 – Portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels  $a_n$  sur 18 unités de temps pour  $\alpha_i = Cste_i$ .  $\diamond$  modes DNS; — modes POD.

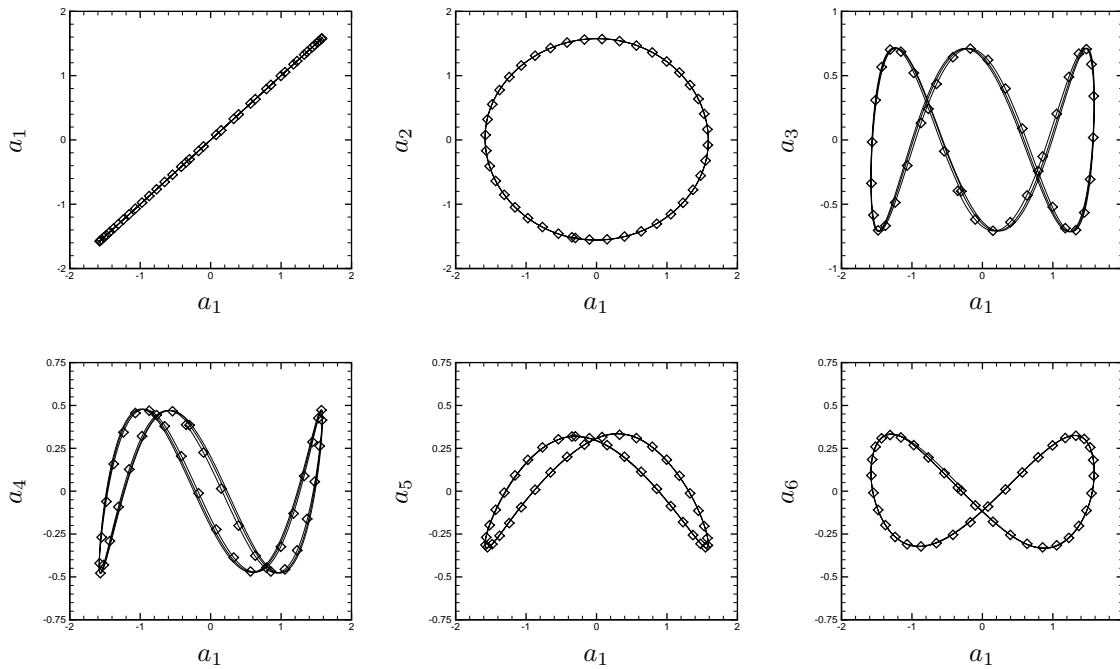


FIGURE 36 – Portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels  $a_n$  sur 18 unités de temps pour  $\alpha_i = f_i(t)$ .  $\diamond$  modes DNS; — modes POD.

de dynamique construit par POD correspond effectivement à la solution que l'on aurait obtenue à partir du modèle détaillé.

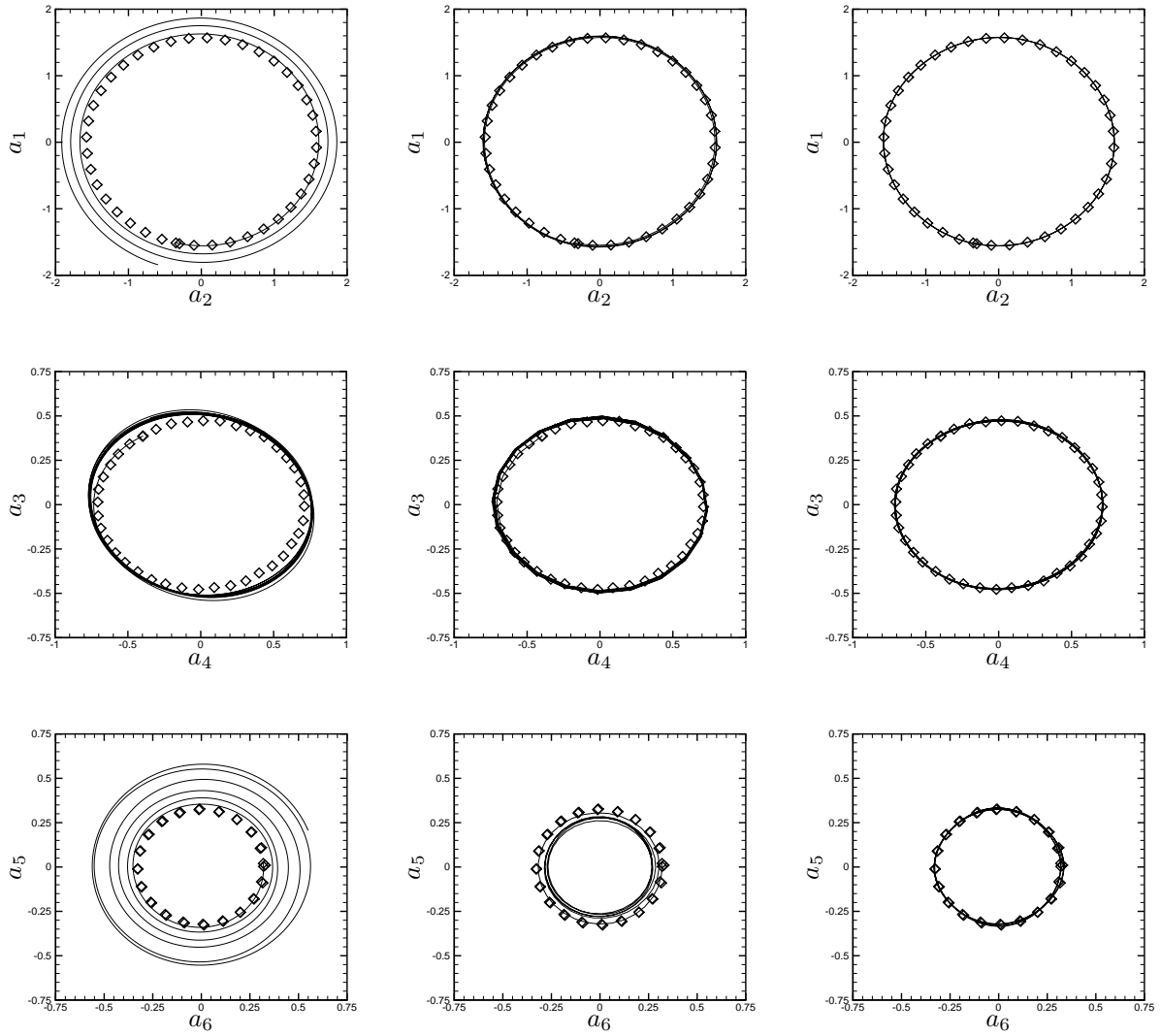


FIGURE 37 – Portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels  $a_n$  sur 18 unités de temps.  $\diamond$  modes DNS; — modes POD. A gauche  $\alpha_i = 0$ , au centre  $\alpha_i = Cste_i$  et à droite  $\alpha_i = f_i(t)$ .

## A Rappel sur les normes usuelles

### A.1 $p$ norme d'un vecteur

Définition : La  $p$  norme du vecteur  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  est :

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exemples :

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

et

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

### A.2 Norme de Frobenius et $p$ norme d'une matrice

Définition : Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N_x \times N_t}$ , la norme de Frobenius (ou norme  $F$ ) de  $A$  est :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_t} a_{ij}^2}.$$

La norme  $p$  de  $A$  est

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|A\mathbf{x}\|_p.$$

## Références

- R. ADRIAN, J.-P. BONNET, J. DELVILLE, F. HUSSAIN, J. LUMLEY, O. METAIS et C. VASSILICOS : Eddy Structure Identification Techniques in Free Turbulent Shear Flows. *In CISM/ERCOFTAC Advanced Course*. Springer-Verlag, 1996.
- K. AFANASIEV et M. HINZE : Adaptive control of a wake flow using Proper Orthogonal Decomposition. *In Shape Optimization and Optimal Design, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, volume 216. Marcel Dekker, 2001.
- N. ALEXANDROV, J.E. DENNIS JR, R.M. LEWIS et V. TORCZON : A Trust Region framework for managing the use of approximation models in optimization. *Icase report*, 97-50, 1997.
- V.R. ALGAZI et D.J. SAKRISON : On the optimality of the Karhunen-Loève expansion. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 15, 1969.
- B.G. ALLAN : A reduced order model of the linearized incompressible Navier-Stokes equations for the sensor/actuator placement problem. *Icase report*, 2000-19, 2000.
- C.A. ANDREWS, J.M. DAVIES et G.R. SCHWARTZ : Adaptive data compression. *Proc. IEEE*, 55, 1967.
- A.C. ANTOULAS : *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Advances in Design and Control. SIAM, 2005.
- J.A. ATWELL : *Proper Orthogonal Decomposition for Reduced Order Control of Partial Differential Equations*. Thèse de doctorat, Virginia Tech, 2000.
- J.A. ATWELL et B.B. KING : Reduced order controllers for spatially distributed systems via Proper Orthogonal Decomposition. Rapport technique, ICAM 99-07-01, Virginia Tech., 1999.
- N. AUBRY, R. GUYONNET et R. LIMA : Spatio-temporal analysis of complex signals : theory and applications. *J. Statis. Phys.*, 64(3/4):683-739, 1991.
- N. AUBRY, P. HOLMES, J.L. LUMLEY et E. STONE : The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 192:115-173, 1988.
- P. BENNER, V. MEHRMANN et D.C. SORENSEN, éditeurs. *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, volume 45 de *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, Germany, 2005.
- M. BERGMANN et L. CORDIER : Control of the cylinder wake in the laminar regime by Trust-Region methods and POD Reduced Order Models. *soumis à J. Fluid Mech.*, 2006.
- M. BERGMANN, L. CORDIER et J.-P. BRANCHER : Optimal rotary control of the cylinder wake using POD Reduced Order Model. *Phys. Fluids*, 17(9):097101 :1-21, 2005.
- G. BERKOOZ, P. HOLMES et J.L. LUMLEY : The Proper Orthogonal Decomposition in the analysis of turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 25:539-575, 1993.
- T.R. BEWLEY : Flow control : new challenges for a new Renaissance. *Progress in Aerospace Sciences*, 37:21-58, 2001.
- T.R. BEWLEY, P. MOIN et R. TEMAM : DNS-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark for feedback algorithms. *J. Fluid Mech.*, 447:179-225, 2001.
- J.-P. BONNET et J. DELVILLE : Coherent structures in turbulent flows and numerical simulations approaches. *In Lecture series 2002-04 on post-processing of experimental and numerical data*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2002.
- J. BURKARDT, M. GUNZBURGER et H.-C. LEE : Centroidal Voronoi Tessellation-Based Reduced-Order Modeling of Complex Systems. Rapport technique, Florida State University, 2004.
- W. CAZEMIER : *Proper Orthogonal Decomposition and low-dimensionnal models for turbulent flows*. Thèse de doctorat, université de Groningen, 1997.

- W. CAZEMIER, R.W.C.P. VERSTAPPEN et A.E.P. VELDMAN : Proper Orthogonal Decomposition and low-dimensional models for driven cavity flows. *Phys. Fluids*, 10(7):1685–1699, 1998.
- A. CHATTERJEE : An introduction to the Proper Orthogonal Decomposition. *Current Science*, 78(7):808–817, 2000.
- E.A. CHRISTENSEN, M. BRØNS et J.N. SØRENSEN : Approximation of large-scale dynamical systems : an overview. Evaluation of POD-based decomposition techniques applied to parameter-dependent non turbulent flows. Rapport technique, université Technique du Danemark, 1998.
- A.R. CONN, N.I.M. GOULD et P.L. TOINT : *Trust-region methods*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- L. CORDIER : *Etude de systèmes dynamiques basés sur la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD). Application à la couche de mélange turbulente et à l'écoulement entre deux disques contra-rotatifs*. Thèse de doctorat, université de Poitiers, 1996.
- L. CORDIER et M. BERGMANN : Proper Orthogonal Decomposition : an overview. *In Lecture series 2002-04 on post-processing of experimental and numerical data*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2002a.
- L. CORDIER et M. BERGMANN : Two typical applications of POD : coherent structures eduction and reduced order modelling. *In Lecture series 2002-04 on post-processing of experimental and numerical data*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2002b.
- M. COUPLET, P. SAGAUT et C. BASDEVANT : Intermodal energy transfers in a proper orthogonal decomposition-Galerkin representation of a turbulent separated flow. *J. Fluid Mech.*, 491:275–284, 2003.
- R. COURANT et D. HILBERT : *Methods of mathematical physics. Vol. 1*. John Wiley & Sons, New-York, 1953.
- A.E. DEANE, I.G. KEVREKIDIS, G.E. KARNIADAKIS et S.A. ORSZAG : Low-dimensional models for complex geometry flows : Application to grooved channels and circular cylinders. *Phys. Fluids*, 10(3):2337–2354, 1991.
- J. DELVILLE, L. UKEILEY, L. CORDIER, J.-P. BONNET et M. GLAUSER : Examination of large-scale structures in a turbulent mixing layer. Part 1. Proper Orthogonal Decomposition. *J. Fluid Mech.*, 391:91–122, 1999.
- M. FAHL : *Trust-Region methods for flow control based on Reduced Order Modeling*. Thèse de doctorat, université de Trier, 2000.
- G.H. GOLUB et C.F. VAN LOAN : *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1990.
- S. GORDEYEV : *Investigation of coherent structure in the similarity region of the planar turbulent jet using POD and wavelet analysis*. Thèse de doctorat, université de Notre Dame, 1999.
- W.R. GRAHAM, J. PERAIRE et K.T. TANG : Optimal Control of Vortex Shedding Using Low Order Models. Part 1. Open-Loop Model Development. *Int. J. for Numer. Meth. in Engrg.*, 44(7):945–972, 1999a.
- W.R. GRAHAM, J. PERAIRE et K.T. TANG : Optimal Control of Vortex Shedding Using Low Order Models. Part 2 : Model-based control. *Int. J. for Numer. Meth. in Engrg.*, 44(7):973–990, 1999b.
- M. GUNZBURGER : Reduced-order modeling. data compression and the design of experiments. Rapport technique, Florida State University, 2004.
- M.D. GUNZBURGER : Introduction into mathematical aspects of flow control and optimization. *In Lecture series 1997-05 on inverse design and optimization methods*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1997a.
- M.D. GUNZBURGER : Adjoint Equation-Based Methods for Control Problems in Incompressible, Viscous Flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65:249–272, 2000.
- N.J. HIGHAM : Matrix nearness problems and applications. *In Applications of matrix theory*, pages 1–27. Glover and Barnett editors, Clarendon Press, 1989.



- P. HOLMES, J.L. LUMLEY et G. BERKOOZ : *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge Monographs on Mechanics, 1996.
- C. HOMESCU, L.R. PETZOLD et R. SERBAN : Error Estimation for Reduced Order Models of Dynamical Systems. Rapport technique, Lawrence Livermore National Laboratory, 2003.
- H. HOTELLING : Analysis of a complex statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24:417–441, 1933.
- L. HUBERT, J. MEULEMAN et W. HEISER : Two purposes for matrix factorization : a historical appraisal. *SIAM Review*, 42:68–82, 2000.
- A. IOLLO : Remarks on the approximation of the Euler equations by a low order model. Rapport technique 3329, INRIA, 1997.
- A. IOLLO, S. LANTERI et J.-A. DÉSIDÉRI : Stability properties of POD-Galerkin approximations for the compressible Navier-Stokes equations. Rapport technique 3589, INRIA, 1998.
- K. ITO et S.S RAVINDRAN : A reduced-order method for simulation and control of fluid flows. *J. Comp. Phys.*, 143:403–425, 1998.
- G. JIN et M. BRAZA : A Nonreflecting Outlet Boundary Condition for Incompressible Unsteady Navier-Stokes Calculations. *J. Comp. Phys.*, 107(2):239–253, 1993.
- I.T. JOLIFFE : *Principal Component Analysis*. Springer-Verlag, 1986.
- K. KARHUNEN : Zur spektral theorie stochasticher prozesse. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Ser. A1, 34, 1946.
- E.G. KARNIADAKIS, M. ISRAELI et S.A. ORSZAG : High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, 97(2):414–443, 1991.
- M. KIRBY et L. SIROVICH : Application of the Karhunen-Loève procedure for the characterization of human faces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(1):103–108, 1990.
- M. LOÈVE : *Probability Theory*. Van Nostrand, 1955.
- J.L. LUMLEY : *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation. The structure of inhomogeneous turbulence*, pages 166–178. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, 1967.
- B.R. NOACK, K. AFANASIEV, M. MORZYŃSKI, G. TADMOR et F. THIELE : A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, 497:335–363, 2003.
- B.R. NOACK, G. TADMOR et M. MORZYŃSKI : Low-dimensional models for feedback flow control. Part I : Empirical Galerkin models. In *2nd AIAA Flow Control Conference*, Portland, Oregon, U.S.A., June 28 – July 1, 2004. AIAA-Paper 2004-2408 (invited contribution).
- J. NOCEDAL et S.J. WRIGHT : *Numerical Optimization*. Springer series in operations research, 1999.
- R. PEYRET : *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Applied Mathematical Sciences 148. Springer, 2002.
- R.D. PRABHU, S. Scott COLLIS et Y. CHANG : The influence of control on Proper Orthogonal Decomposition of wall-bounded turbulent flows. *Phys. Fluids*, 13(2):520–537, 2001.
- S. PRAJNA : POD Model Reduction with Stability Guarantee. In *IEEE CDC*, 2003.
- M. RATHINAM et L. PETZOLD : A New Look at Proper Orthogonal Decomposition. *SIAM J. Num. Anal.*, 41(5):1893–1925, 2003.
- S.S. RAVINDRAN : Proper Orthogonal Decomposition in optimal control of fluids. Rapport technique, NASA, Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1999.
- S.S. RAVINDRAN : Reduced-order adaptive controllers for fluid flows using POD. *J. of Scientific Computing*, 15(4):457–478, 2000a.

- S.S. RAVINDRAN : A reduced-order approach for optimal control of fluids using Proper Orthogonal Decomposition. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 34:425–448, 2000b.
- D. REMPFER : Investigations of boundary layer transition via Galerkin Projections on Empirical Eigenfunctions. *Phys. Fluids*, 8(1):175–188, 1996.
- D. REMPFER : On low-dimensional Galerkin models for fluid flow. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 14:75–88, 2000.
- D. REMPFER et H.F. FASEL : Evolution of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 260:351–375, 1994.
- F. RIESZ et B.S. NAGY : *Functionnal Analysis*. Ungar, N.Y., 1955.
- T.J. RIVLIN : *An introduction to the approximation of functions*. Dover, 1981.
- C.W ROWLEY : *Modeling, simulation and control of cavity flow oscillations*. Thèse de doctorat, California Institute of Technology, 2002.
- C.W. ROWLEY : Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition. Rapport technique, Princeton University, 2004.
- R.L. SANI et P.M. GRESHO : Resume and remarks on the open boundary condition mini-symposium. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 18:983–1008, 1994.
- H. SCHLICHTING et K. GERSTEN : *Boundary Layer Theory*. Springer, 8th édition, 2003.
- S. SIRISUP et G.E. KARNIADAKIS : A spectral viscosity method for correcting the long-term behavior of POD model. *J. Comp. Phys.*, 194:92–116, 2004.
- L. SIROVICH : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1 : Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, XLV(3):561–571, 1987a.
- L. SIROVICH : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 2 : Symmetries and transformations. *Quarterly of Applied Mathematics*, XLV(3):573–582, 1987b.
- L. SIROVICH : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 3 : Dynamics and scaling. *Quarterly of Applied Mathematics*, XLV(3):583–590, 1987c.
- A. SORNBORGER, C. SAILSTAD, E. KAPLAN et L. SIROVICH : Spatiotemporal analysis of optical imaging data. *NeuroImage*, 18:610–621, 2003.
- P.R. SPALART, W.H. JOU, M. STRELETS et S.R. ALLMARAS : Comments on the Feasibility of LES for Wings, and on a Hybrid RANS/LES Approach. In *1st AFOSR Int. Conf. on DNS/LES*, Ruston, L.A., Aug. 4-8, 1997. In : *Advances in DNS/LES*, C. Liu and Z. Liu (eds.), Greyden Press, Columbus, OH.
- L. UKEILEY, L. CORDIER, R. MANCEAU, J. DELVILLE, M. GLAUSER et J.-P. BONNET : Examination of large-scale structures in a turbulent mixing layer. Part 2. Dynamical systems model. *J. Fluid Mech.*, 441:67–108, 2001.
- G. VIGO : The Proper Orthogonal Decomposition applied to unsteady compressible Navier-Stokes equation. Rapport technique 3945, INRIA, 1998.
- S. VOLKWEIN : Proper Orthogonal Decomposition and Singular Value Decomposition. Rapport technique 153, Institut für Mathematik, universität de Graz, 1999.
- S. VOLKWEIN : Optimal and suboptimal control of the Partial Differential Equations : Augmented Lagrange-SQP methods and Reduced Order Modeling with Proper Orthogonal Decomposition. Habilitation à diriger les recherches, universität de Graz, 2001.
- K.E. WILLCOX : *Reduced-order aerodynamic models for aeroelastic control of turbomachines*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- K. ZHOU, J.C. DOYLE et K. GLOVER : *Robust and optimal control*. Prentice Hall, 1996.