

Contrôle optimal par réduction de dynamique du sillage d'un cylindre circulaire

Laurent Cordier, Michel Bergmann & Jean-Pierre Brancher

`Michel.Bergmann@ensem.inpl-nancy.fr`

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée

UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP)

ENSEM - 2, avenue de la Forêt de Haye

BP 160 - 54504 Vandoeuvre Cedex, France



Plan de l'exposé

I - Configuration et méthodes de résolutions numériques

II - Contrôle optimal

III - Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)

IV - Modèle réduit de la dynamique du cylindre (ROM)

V - Formulation contrôle optimal appliquée au modèle réduit

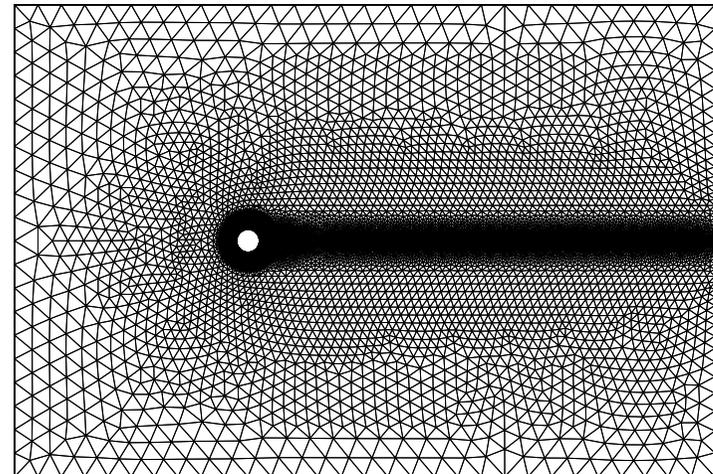
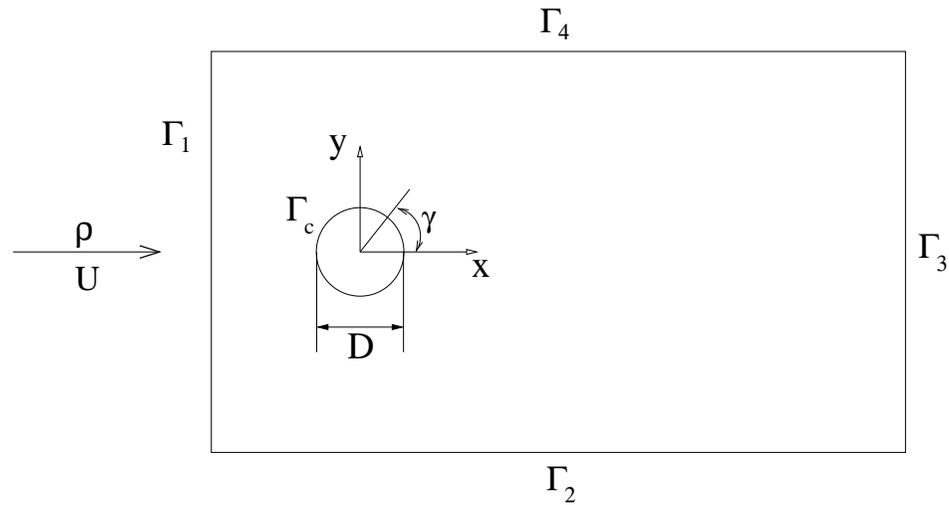
VI - Résultats

Conclusions et perspectives

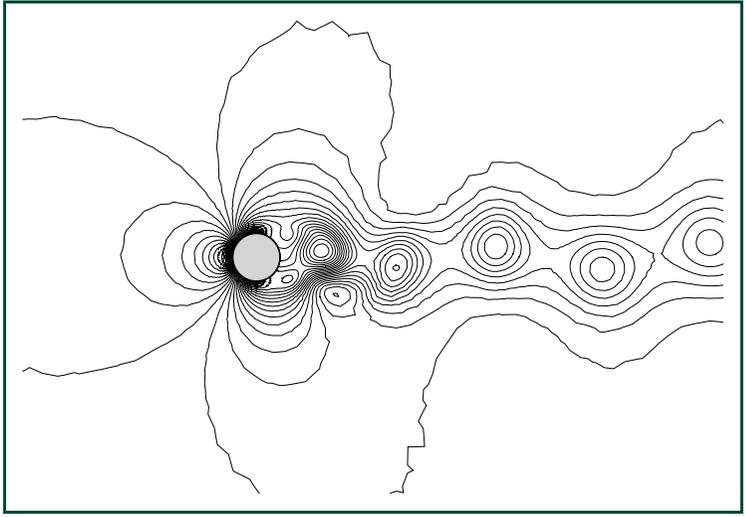


I - Configuration et méthodes de résolutions numériques

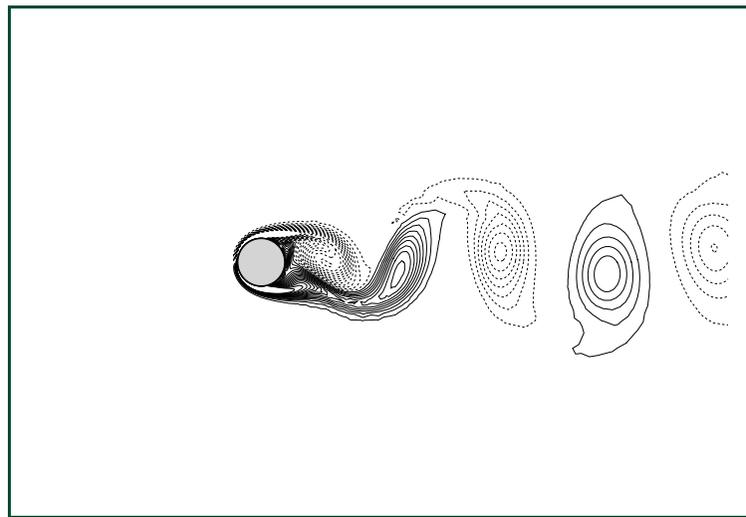
- Écoulement 2D autour d'un cylindre circulaire à $Re = 200$
- Fluide visqueux, incompressible et newtonien
- Oscillations du cylindre à une vitesse tangentielle $\gamma(t)$
- Méthode à pas fractionnaires (correction de pression) en temps
- Éléments finis (P_1, P_1) en espace



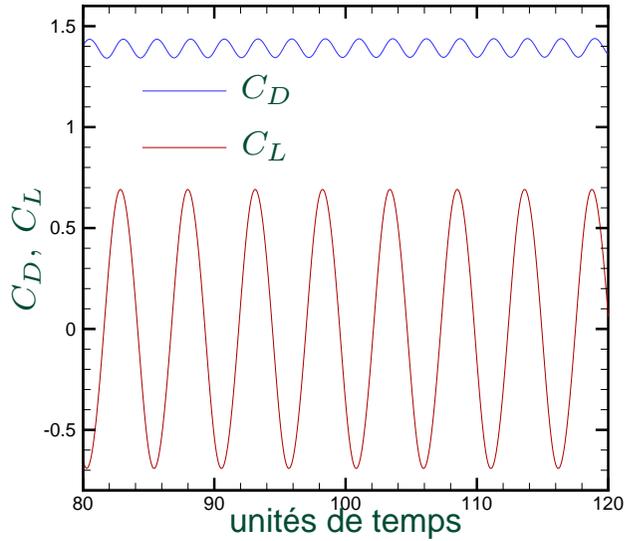
I - Configuration et méthodes de résolutions numériques



Isobares à $t = 100$.



Iso-contours de vorticité à $t = 100$.



Coefficients aérodynamiques.

| Auteurs | S_t | C_D |
|--------------------------------|---------------|---------------|
| Braza <i>et al.</i> (1986) | 0.2000 | 1.4000 |
| Henderson <i>et al.</i> (1997) | 0.1971 | 1.3412 |
| He <i>et al.</i> (2000) | 0.1978 | 1.3560 |
| Présente étude | 0.1983 | 1.3972 |

Nombres de Strouhal et coefficient de traînée.



II - Contrôle Optimal *Définition*

Méthode mathématique permettant de déterminer **sans empirisme** une loi de commande à partir de l'optimisation d'une fonctionnelle coût.

- Equations d'état $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$;
(Navier-Stokes + C.I. + C.L.)
- Variables de contrôle c ;
(Soufflage/aspiration, paramètres de forme ...)
- Fonctionnelle objective $\mathcal{J}(\phi, c)$.
(Traînée, portance, ...)

Déterminer les variables de contrôle c et les variables d'état ϕ telles que la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}(\phi, c)$ soit minimale ou maximale sous les contraintes $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$.



II - Contrôle Optimal *Multiplicateurs de Lagrange*

Optimisation avec contraintes \Rightarrow optimisation sans contraintes

► Introduction de multiplicateurs de Lagrange ξ .

► Fonctionnelle de Lagrange :

$$\mathcal{L}(\phi, c, \xi) = \mathcal{J}(\phi, c) - \langle \mathcal{F}(\phi, c), \xi \rangle$$

► Il faut rendre \mathcal{L} "stationnaire", on cherche donc $\delta\mathcal{L} = 0$:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c}\delta c + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}\delta\xi = 0$$

► On suppose ϕ , c et ξ indépendantes :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c}\delta c = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}\delta\xi = 0$$



II - Contrôle Optimal *Système optimal*

- ▶ Equations d'état ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} \delta \xi = 0$) :

$$\mathcal{F}(\phi, c) = 0$$

- ▶ Equations adjointes ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi = 0$) :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \right)^* \xi = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \right)^*$$

- ▶ Conditions d'optimalité ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \delta c = 0$) :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \right)^* = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c} \right)^* \xi$$

⇒ Assure un minimum local

⇒ Méthode de résolution coûteuse en temps CPU
et mémoire pour des systèmes de grandes tailles !



"without an inexpensive method for reducing the cost of flow computation, it is unlikely that the solution of optimization problems involving the three dimensional unsteady Navier-Stokes system will become routine"

M. Gunzburger, 2000



III - Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres

► Proper Orthogonal Decomposition (POD), Lumley (1967).

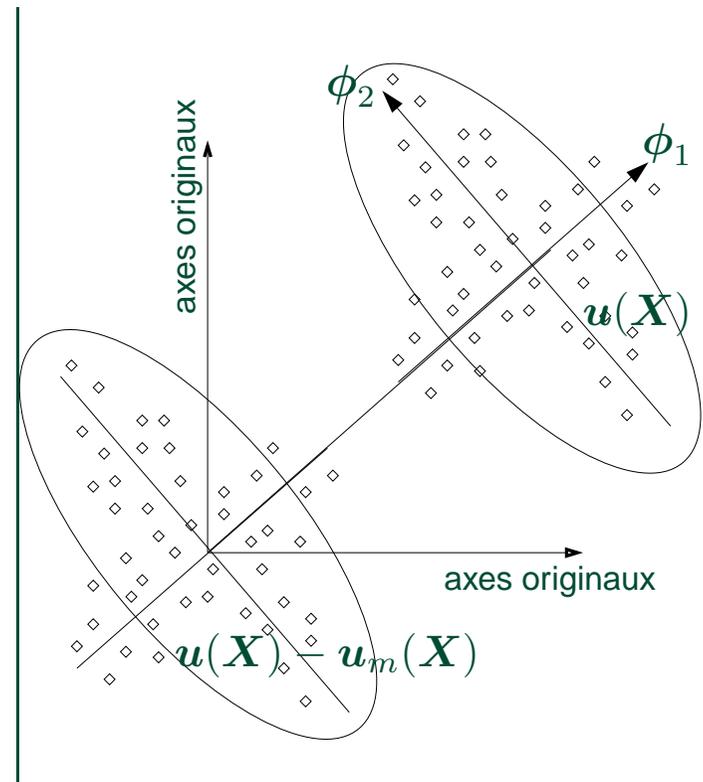
► Rechercher la réalisation $\phi(\mathbf{X})$ "ressemblant le plus" en moyenne aux réalisations $\mathbf{u}(\mathbf{X})$. ($\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+$)

► $\phi(\mathbf{X})$ solution du problème :

$$\max_{\phi} \frac{\langle |(\mathbf{u}, \phi)|^2 \rangle}{\|\phi\|^2}.$$

► Convergence optimale en norme L^2 (énergie) de $\phi(\mathbf{X})$

⇒ réduction de dynamique envisageable.



Lumley J.L. (1967) : The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, ed. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, pp. 166-178.



III - Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres

- Equivalence avec une équation intégrale de Fredholm :

$$\int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \phi_j^{(n)}(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda^{(n)} \phi_i^{(n)}(\mathbf{X}) \quad n = 1, \dots, N_{POD}$$

$\hookrightarrow R(\mathbf{X}, \mathbf{X}') : \text{tenseur des corrélations spatio-temporelles.}$

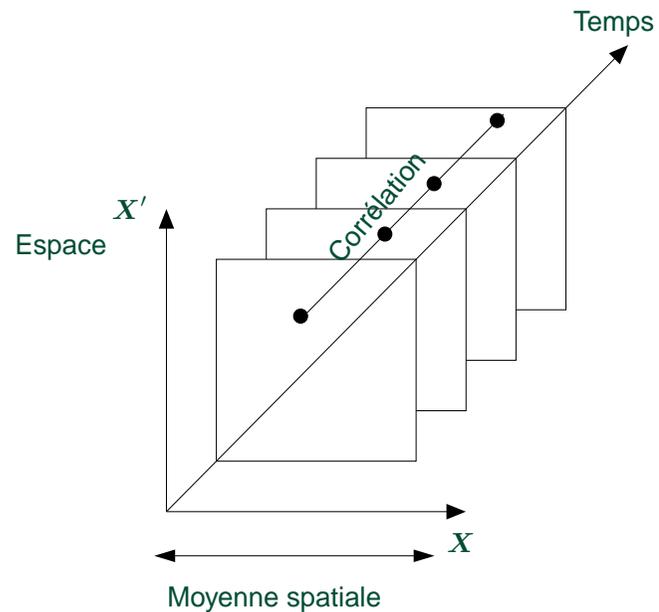
- Méthode des snapshots, Sirovich (1987) :

$$\int_T C(t, t') a^{(n)}(t') dt' = \lambda^{(n)} a^{(n)}(t)$$

$\hookrightarrow C(t, t') : \text{corrélations temporelles.}$

- $\phi(\mathbf{X})$ base de l'écoulement :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a^{(n)}(t) \phi^{(n)}(\mathbf{x}).$$



Sirovich L. (1987) : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1,2,3 *Quarterly of Applied Mathematics*, **XLV** N° 3, pp. 561–571.



IV - Modèle réduit de la dynamique du cylindre

- Projection de Galerkin de Navier-Stokes sur la base POD :

$$\left(\phi^{(i)}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \left(\phi^{(i)}, -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right).$$

- Intégration par parties (formule de Green) :

$$\begin{aligned} \left(\phi^{(i)}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= \left(p, \nabla \cdot \phi^{(i)} \right) - \frac{1}{Re} \left((\nabla \otimes \phi^{(i)})^T, \nabla \otimes \mathbf{u} \right) \\ &\quad - [p \phi^{(i)}] + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \phi^{(i)}]. \end{aligned}$$

avec $[a] = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$ et $(A, B) = \int_{\Omega} A : B d\Omega = \sum_{i,j} \int_{\Omega} A_{ij} B_{ji} d\Omega$.



IV - Modèle réduit de la dynamique du cylindre

- Décomposition de la vitesse sur N_{POD} modes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_{POD}} a^{(k)}(t) \phi^{(k)}(\mathbf{x}).$$

- Système dynamique avec N_{gal} modes retenus (équations d'état) :

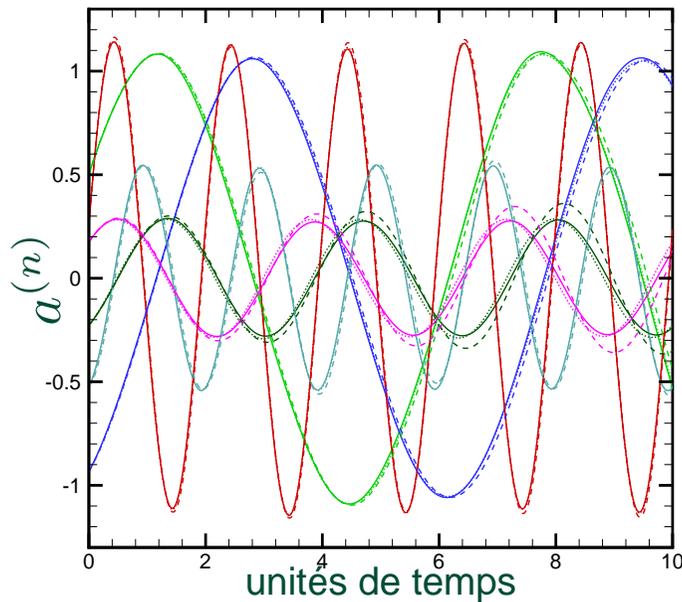
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d a^{(i)}(t)}{dt} = \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a^{(j)}(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a^{(j)}(t) a^{(k)}(t) \\ \quad + \mathcal{D}_i \frac{d\gamma}{dt} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a^{(j)}(t) \right) \gamma + \mathcal{G}_i \gamma^2 \\ a^{(i)}(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \phi^{(i)}(\mathbf{x})). \end{array} \right.$$

$\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{ij}, \mathcal{C}_{ijk}, \mathcal{D}_i, \mathcal{E}_i, \mathcal{F}_{ij}$ et \mathcal{G}_i dépendent de $\phi, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_c$ et Re .

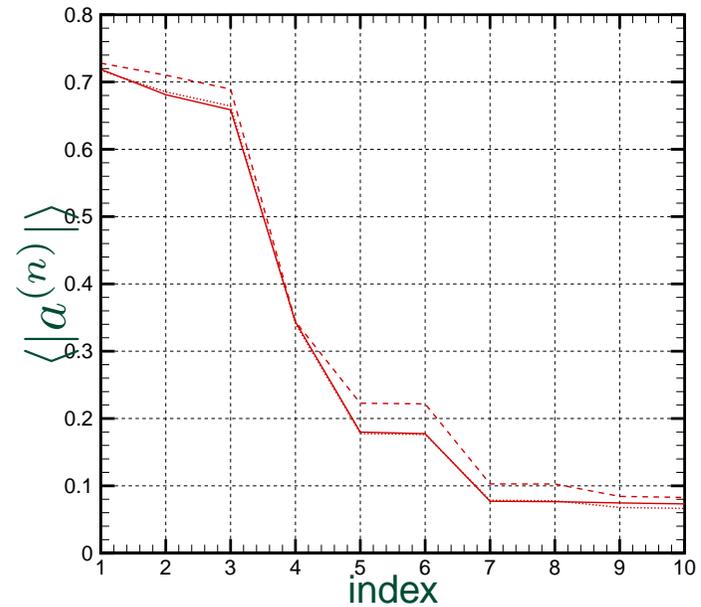


IV - Modèle réduit de la dynamique du cylindre *Stabilisation*

Intégration et stabilisation (optimale) du modèle dynamique d'ordre réduit pour $\gamma = A \sin(2\pi S_t t)$, $A = 2$ et $S_t = 0,5$.



Evolution temporelle des 6 premiers modes propres temporels.



Amplitudes moyennes des modes POD.

- projection (Navier Stokes)
- - - prédiction avant stabilisation (modèle d'ordre faible)
- ... prédiction après stabilisation (modèle d'ordre faible).



V - Formulation contrôle optimal appliquée au modèle réduit

- Fonctionnelle coût :

$$\mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \int_0^T J(\mathbf{a}, \gamma(t)) dt = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{N_{gal}} a^{(i)2} + \frac{\alpha}{2} \gamma(t)^2 \right) dt.$$

α : paramètre de régularisation (pénalisation).

- Equations adjointes :

$$\begin{cases} \frac{d\xi^{(i)}(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=1}^{N_{gal}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a^{(k)} \right) \xi^{(j)}(t) - 2a^{(i)} \\ \xi^{(i)}(T) = 0. \end{cases}$$

- Condition d'optimalité :

$$\delta\gamma(t) = - \sum_{i=1}^{N_{gal}} \mathcal{D}_i \frac{d\xi^{(i)}}{dt} + \sum_{i=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a^{(j)} + 2\mathcal{G}_i \gamma(t) \right) \xi^{(i)} + \alpha \gamma(t).$$



V - Formulation contrôle optimal appliquée au modèle réduit

► $\gamma^{(0)}(t)$ fixé ; Pour $n = 0, 1, 2, \dots$ et tant que critère de convergence non vérifié Faire :

1. Résolution de 0 à T des équations d'état avec $\gamma^{(n)}(t)$;

↪ *variables d'état* $a^{(n)}(t)$

2. Résolution de T à 0 des équations adjointes avec $a^{(n)}(t)$;

↪ *variables adjointes* $\xi^{(n)}(t)$

3. Résolution des conditions d'optimalité avec $a^{(n)}(t)$ et $\xi^{(n)}(t)$;

↪ *gradient de la fonctionnelle objective* $\delta\gamma^{(n)}(t)$

4. Nouveau contrôle ↪ $\gamma^{(n+1)}(t) = \gamma^{(n)}(t) + \omega^{(n)} \delta\gamma^{(n)}(t)$

► Fin Faire.



VI - Résultats *Généralités*

► Pas de réactualisation de la base POD.

► Représentativité énergétique *a priori* différente de représentativité dynamique :

↪ inconvénient possible pour le contrôle.

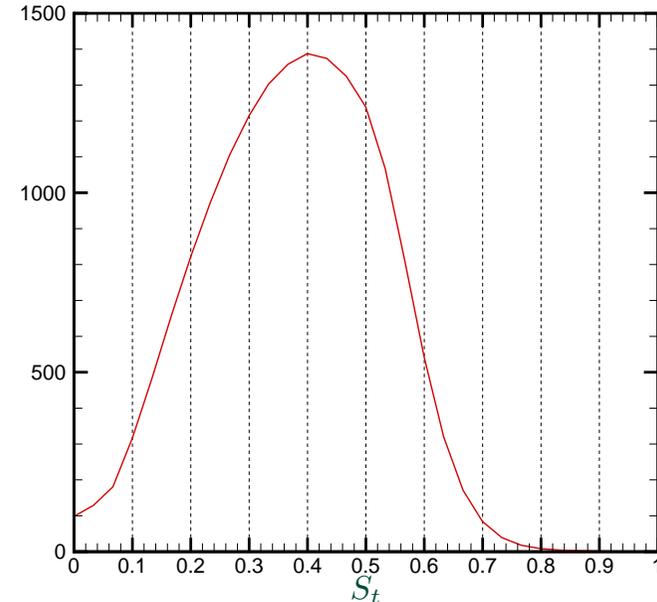
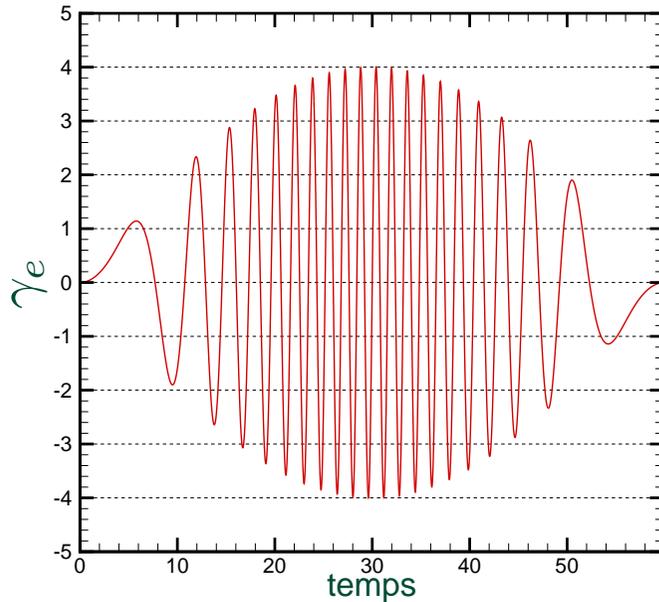
↪ un système POD représente *a priori* uniquement une dynamique proche de celle utilisée pour le générer.

► Construction d'une base POD généralisée représentative d'une plus large gamme de dynamique :

↪ *excitation d'un plus grand nombre de degrés de liberté par balayage en amplitudes et en fréquences de $\gamma(t)$.*



VI - Résultats *Excitation*



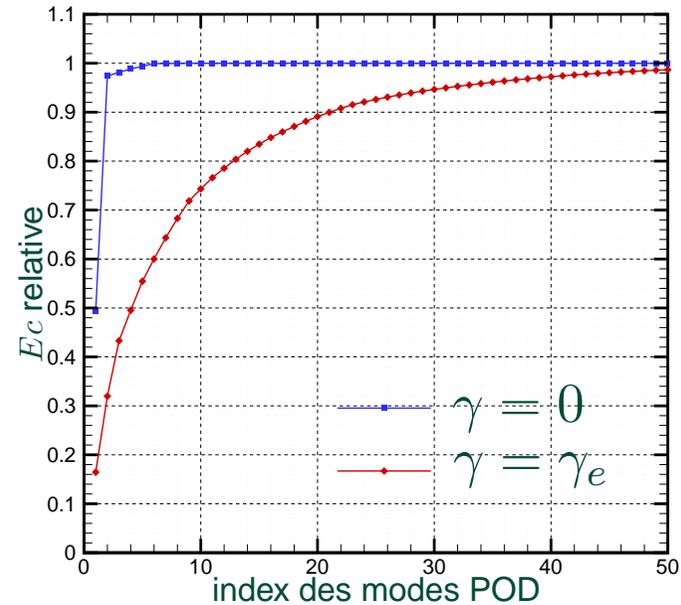
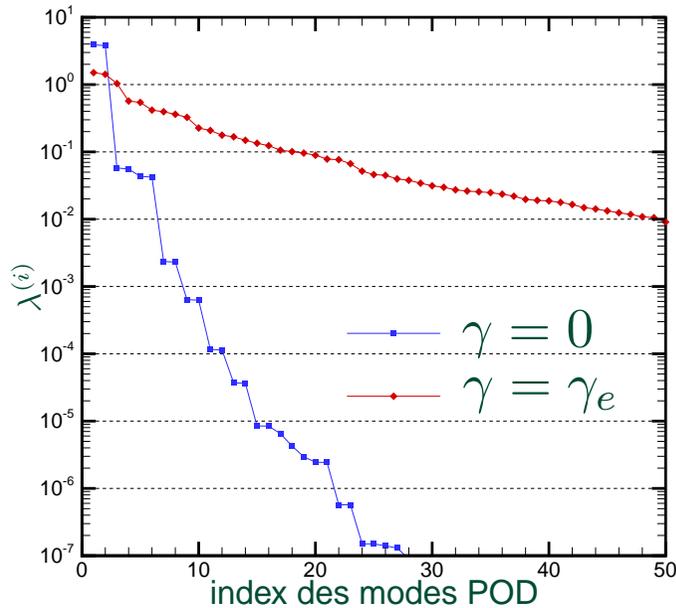
$$\gamma_e(t) = A_1 \sin(2\pi S_{t1} t) \times \sin(2\pi S_{t2} t - A_2 \sin(2\pi S_{t3} t))$$

avec $A_1 = 4$, $A_2 = 18$, $S_{t1} = 1/120$, $S_{t2} = 1/3$ et $S_{t3} = 1/60$.

- ▶ $0 \leq \text{amplitudes} \leq 4$ et analyse de Fourier $\Rightarrow 0 \leq \text{fréquences} \leq 0.65$
- ▶ γ_e loi de contrôle initiale dans processus itératif.



VI - Résultats *Energie*



► **Cylindre stationnaire $\gamma = 0$:**

↪ 2 modes sur 100 suffisent pour représenter 97% de l'énergie.

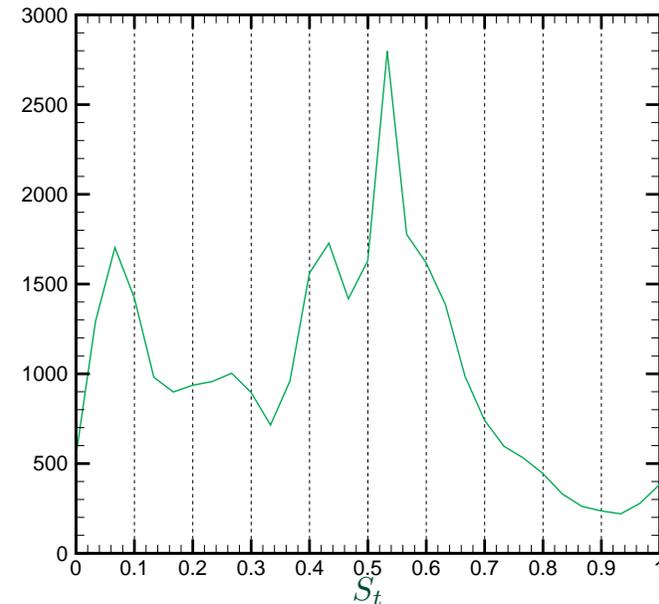
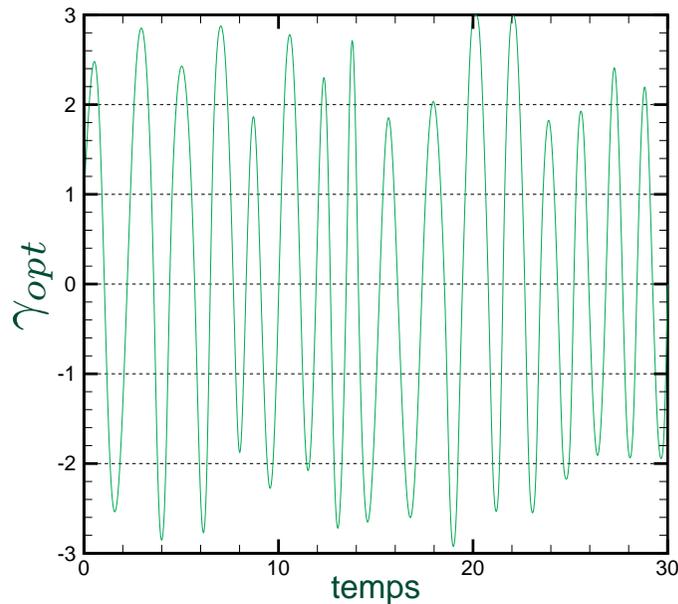
► **Cylindre excité $\gamma = \gamma_e$:**

↪ 40 modes sur 100 sont nécessaires pour représenter 97% de l'énergie

⇒ *Evolution de la robustesse p.r. aux évolutions dynamiques.*



VI - Résultats *Contrôle optimal*



- Diminution très importante de l'instationnarité du sillage.

$$\mathcal{J}(\gamma_e) = 9,81 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}(\gamma_{opt}) = 5,63.$$

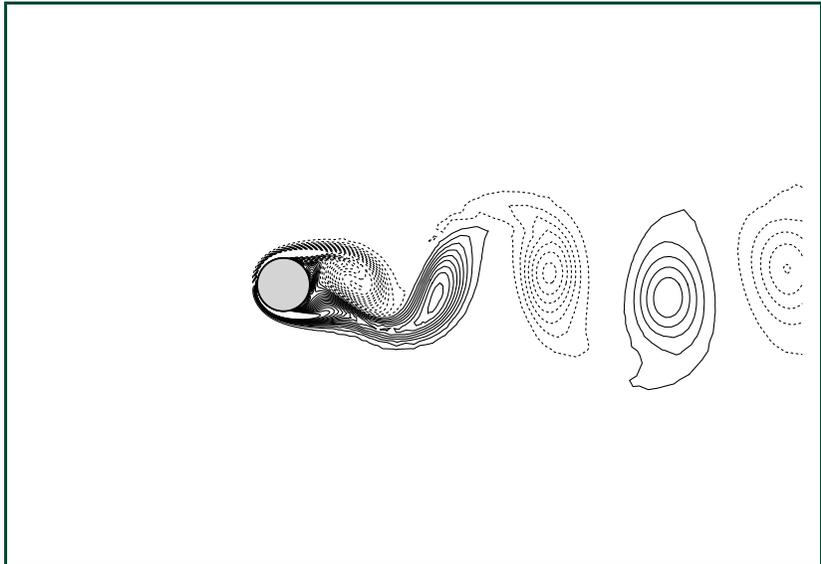
$$\gamma_{opt} \simeq A \sin(2\pi S_t t) \text{ avec } A = 2,2 \text{ et } S_t = 0,53$$

- Le contrôle est optimal pour le système POD ROM.
- Le contrôle est-il optimal pour Navier-Stokes ?

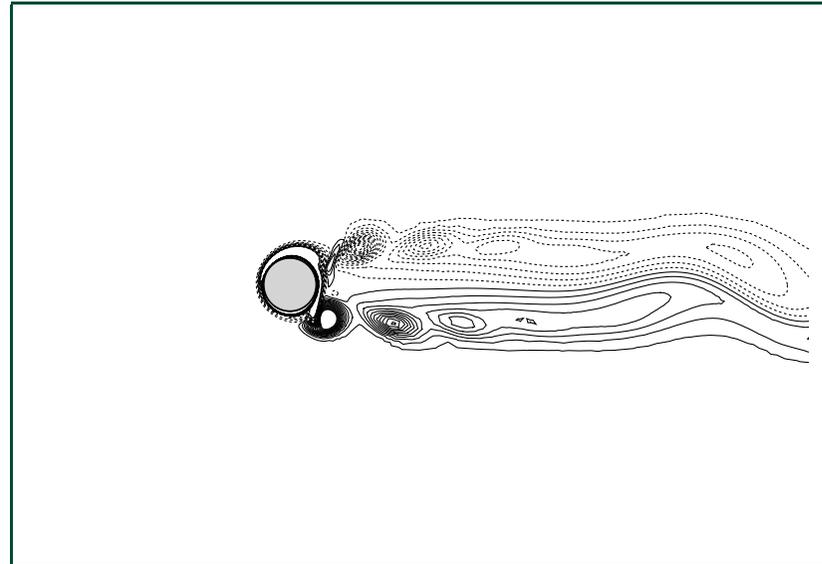


VI - Résultats *Comparaison des structures du sillage*

- ▶ Aucune preuve mathématique d'optimalité pour Navier-Stokes.



a) *cylindre stationnaire* $\gamma = 0$



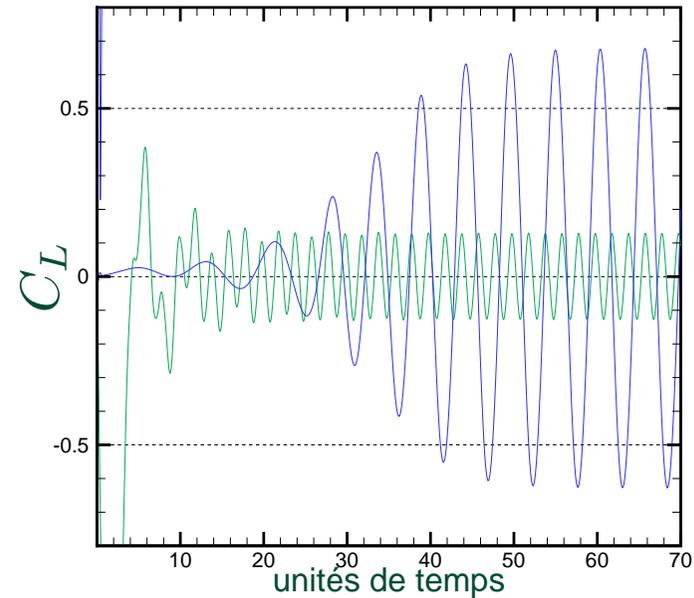
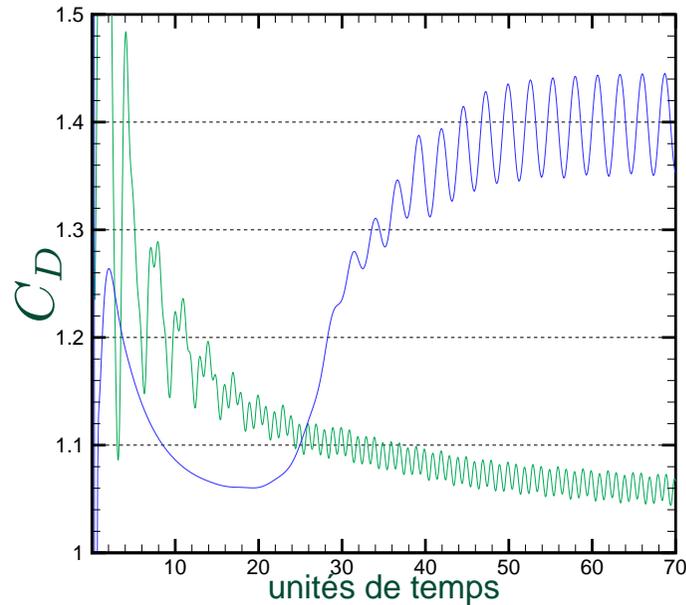
b) *cylindre contrôlé* $\gamma = \gamma_{opt}$

Isocontours de vorticité ω_z .

- ▶ *Cylindre stationnaire* : $\gamma = 0 \Rightarrow$ *Sillage asymétrique.*
 - \hookrightarrow *Grosses structures porteuses d'énergie.*
- ▶ *Cylindre contrôlé* : $\gamma = \gamma_{opt} \Rightarrow$ *Sillage quasi symétrique.*
 - \hookrightarrow *Plus petites structures \Rightarrow moins énergétiques.*



VI - Résultats *Coefficients aérodynamiques*



- ▶ Importante réduction de traînée :
 $C_D = 1,40$ pour $\gamma = 0$ et $C_D = 1,06$ pour $\gamma = \gamma_{opt}$ (plus de 25%).
- ▶ Diminution de l'amplitude de la portance :
 $C_L = 0,68$ pour $\gamma = 0$ et $C_L = 0,13$ pour $\gamma = \gamma_{opt}$.



VI - Résultats *Coûts de calcul*

- ▶ Contrôle optimal Navier Stokes par He *et al.* (2000) :
 - ↪ loi de contrôle harmonique avec $A = 3$ et $S_t = 0,75$.
 - ⇒ 30% de réduction de traînée.
- ▶ Contrôle optimal POD ROM (présente étude) :
 - ↪ loi de contrôle harmonique avec $A = 2,2$ et $S_t = 0,53$.
 - ⇒ 25% de réduction de traînée.
- Coûts énergétiques inférieurs (gain énergétique supérieur ?)
- Temps de calcul : **100 fois inférieur** par POD ROM que par NSE !
(idem équations adjointes et condition d'optimalité)
- Stockage mémoire : **600 fois moins de variables** par POD ROM que par NSE !

↪ Contrôle "optimal" écoulements 3D envisageable !



► Conclusions

- Objectifs atteints : diminution de la traînée via la minimisation de l'instationnarité du sillage du modèle réduit.
- Coûts de calculs très faibles.
- Méthode applicable à des cas moins académiques.

► Perspectives

- Améliorer la représentativité du modèle POD.
 - ↪ "Optimiser" l'excitation temporelle γ_e ,
 - ↪ Mélanger des snapshots correspondants à plusieurs excitations temporelles.
- Recherche d'un contrôle périodique $\gamma(t) = A \sin(2\pi S_t t)$ avec réactualisation de la base POD (premiers résultats encourageants).
- Couplage avec des méthodes d'optimisation à régions de confiance (TRPOD) : convergence prouvée sous conditions.
- Coupler la pression au modèle POD.
- Contrôle optimal de Navier-Stokes.

