

Chapitre 4

Modèles d'Ordre Réduit basés sur la POD (POD ROM)

Sommaire

4.1	Introduction	97
4.1.1	Motivations	97
4.1.2	Utilisation de modèles d'ordre réduit en optimisation	98
4.2	Projection de Galerkin	100
4.2.1	Généralités	100
4.2.2	Modèles d'ordre faibles basés sur la POD	101
4.2.3	Conditions aux limites	102
4.3	Application au cylindre	103
4.3.1	POD du cylindre stationnaire	104
4.3.2	Incorporation du contrôle dans le modèle POD	108
4.4	Intégration et stabilisation du modèle d'ordre faible	109
4.4.1	Intégration du système POD	109
4.4.2	Amélioration du système d'ordre faible	114
4.4.3	Conclusions	122
4.5	Etude des bifurcations bidimensionnelles par POD ROM	123
4.5.1	Introduction	123
4.5.2	Etude de stabilité de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire en 2D	125
4.5.3	Etude de la première bifurcation	126
4.5.4	Etude de la seconde bifurcation	127
4.5.5	Conclusions	131

4.1 Introduction

4.1.1 Motivations

Ce chapitre a pour objectif de déterminer des méthodes basées sur la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD) dans le but de contrôler de manière optimale des écoulements de fluides visqueux et incompressibles. Prandtl a été l'un des premiers à s'intéresser au contrôle d'écoulements d'un point de vue expérimental, en essayant de retarder le décollement d'une couche limite (Prandtl, 1925). Cependant, l'explosion récente des techniques MEMS¹ (voir Gad-el-Hak, 2002 pour un état de l'art) a entraîné un regain d'intérêt pour le contrôle actif en mécanique des fluides (Gunzburger, 1995; Gad-el-Hak, 2000).

1. *Micro-Electro-Mechanical-Systems*

Dans un problème d'optimisation numérique en Mécanique des Fluides, les systèmes matriciels obtenus après discrétisation spatiale sont généralement de grande taille. Or, les procédures d'optimisation étant souvent itératives, il est nécessaire de résoudre les équations d'état un grand nombre de fois, ce qui représente au final la majeure partie des temps de calcul. Il existe donc une réelle nécessité de développer des modèles d'ordre réduit (*Reduced Order Model*, ROM) susceptibles d'approximer les modèles discrétisés d'ordre élevé au cours du processus d'optimisation. Un grand nombre de bases peut être utilisé pour réduire l'ordre des modèles, citons les bases de Lagrange, d'Hermite, de Taylor, les bases POD, ... Pour une revue complète des bases pouvant être utilisées, le lecteur pourra se référer à Ito et Ravindran (1998). Dans ce mémoire, la dynamique non linéaire des écoulements sera modélisée par l'intermédiaire de modèles réduits basés sur des fonctions POD (*Proper Orthogonal Decomposition Reduced Order Model* ou POD ROM).

Au chapitre précédent, il a été démontré que les fonctions propres POD formaient une base complète de fonctions orthonormales, c'est à dire que chaque réalisation spatio-temporelle $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ pouvait se décomposer sur cette base de la manière suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a_n(t) \Phi_n(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

avec

$$a_n(t) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \Phi_n(\mathbf{x})) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \Phi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.2)$$

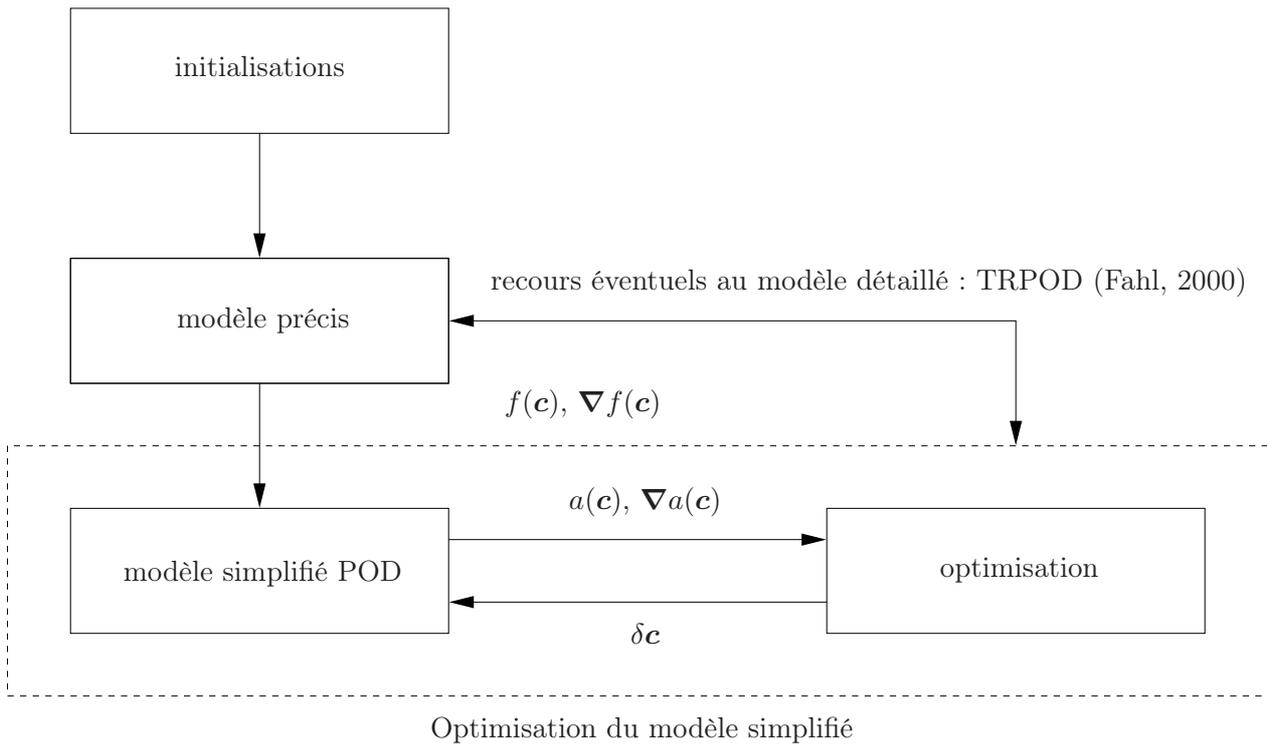
où $\Phi_n(\mathbf{x})$ sont les fonctions propres spatiales POD et N_{POD} , le nombre total de modes POD.

L'objectif ici est d'utiliser la convergence optimale énergétique des fonctions de base POD pour construire un système dynamique d'ordre réduit pour les coefficients temporels $a_n(t)$. Une méthode classique pour obtenir ce type de système consiste à utiliser une projection de Galerkin des équations d'état sur la base POD. Cette méthode de Galerkin, qui sera décrite à la section 4.2, permet d'obtenir, à partir d'un ensemble de réalisations $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ issu par exemple d'une configuration non contrôlée de l'écoulement, un modèle d'ordre réduit des équations de Navier-Stokes, capable de représenter la dynamique de la configuration de départ. Cependant, il n'existe aucune garantie que le modèle réduit ainsi construit soit efficace pour modéliser une dynamique d'écoulement, éventuellement altérée par application du contrôle. Cette question essentielle est abordée dans la section suivante.

4.1.2 Utilisation de modèles d'ordre réduit en optimisation

Encore récemment, l'utilisation d'une base POD, déterminée sur une configuration d'écoulement non contrôlé, pour prédire un écoulement contrôlé, était souvent considérée comme une procédure efficace. Les modifications de la base POD sous l'action du contrôle étaient souvent négligées. La méthode de résolution consistait à approcher un modèle de connaissance de type Navier-Stokes par un modèle réduit basé sur la POD, puis à optimiser de manière exacte ce modèle approché (Ravindran, 2000b). L'inconvénient majeur est qu'il n'existe aucune garantie que la solution issue de l'optimisation du modèle réduit converge vers la solution optimale du modèle exact. Dans une étude récente, Prabhu *et al.* (2001) ont montré que l'utilisation d'une base POD, déterminée en configuration non contrôlée, ne permet pas de capturer les principales caractéristiques d'un écoulement contrôlé. Il paraît donc nécessaire de prendre en compte, lors du processus itératif, des informations non disponibles lors de la construction de la base POD non contrôlée.

La figure 4.1 représente schématiquement les principes d'utilisation de modèles simplifiés dans des méthodes d'optimisation. Afin de réactualiser la base POD, qui n'est peut être plus adaptée pour représenter une dynamique contrôlée, il est possible d'avoir éventuellement recours au modèle détaillé au cours du processus d'optimisation du modèle simplifié. Le problème majeur est de déterminer le moment où il est nécessaire d'effectuer cette réactualisation. Cette question essentielle sera abordée dans les chapitres suivants. Afin de simplifier la description, nous pouvons considérer, par exemple, qu'une solution consiste à réaliser un nombre d'itérations donné dans le processus d'optimisation du modèle simplifié. A la fin de cette phase, le modèle précis, basé sur les résultats de l'optimisation précédente, est utilisé pour construire un nouveau modèle simplifié : une autre phase d'optimisation peut alors commencer. Ravindran (2000a) a suivi cette démarche et a réussi ainsi, au cours du processus d'optimisation, à améliorer la représentativité des modèles réduits. En Mécanique des Fluides, l'algorithme modèle peut s'énoncer de la manière suivante :

FIGURE 4.1 – *Algorithme d'optimisation basé sur des modèles réduits.*

Choix d'une loi de contrôle initiale

1. Résolution des équations de Navier-Stokes avec la dernière loi de contrôle, extraction d'un ensemble de réalisations de l'écoulement et évaluation de la fonction objectif.
2. Si un critère de convergence donné est satisfait, l'algorithme est arrêté, sinon on va à l'étape 3.
3. Détermination d'une base POD et construction d'un modèle réduit.
4. Détermination d'une nouvelle loi de contrôle, non nécessairement optimale, après quelques itérations du processus d'optimisation utilisant le modèle réduit, puis retour à l'étape 1.

En dépit des manques de justifications et de précisions intervenant à l'étape 4 de l'algorithme précédent, Ravindran (2000a) obtient des résultats numériques probants, prouvant ainsi l'efficacité de cette méthode dans le cas de zones de recirculations. Cet algorithme sera mis en œuvre au chapitre 6. Comme il vient d'être discuté, le point faible de cet algorithme est l'étape 4. Afin de rendre ce type d'algorithme plus robuste, c'est à dire de s'assurer que la solution obtenue par optimisation du modèle réduit converge au moins vers un minimum local du problème précis, Alexandrov *et al.* (1997) proposent d'utiliser des algorithmes à régions de confiance (Conn *et al.*, 2000) afin d'estimer à quel moment il est nécessaire d'avoir recours au modèle détaillé. En effet, les méthodes à régions de confiance donnent une mesure de l'évolution de l'objectif réel, associé au modèle détaillé, par rapport à l'évolution d'un objectif modèle, correspondant au modèle réduit. Cette mesure permet d'évaluer l'efficacité du modèle réduit dans le processus d'optimisation. Lorsque ce modèle n'est plus suffisamment efficace, il sera automatiquement amélioré en ayant recours au modèle détaillé. Un algorithme couplant régions de confiance et modèle réduit (*Trust Region Proper Orthogonal Decomposition*, TRPOD) introduit par Fahl (2000), sera présenté au chapitre 7.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans un premier temps, la projection de Galerkin est introduite, en insistant tout particulièrement sur la prise en compte des conditions aux limites (§ 4.2). Ensuite, cette méthode est appliquée à l'écoulement de sillage d'un cylindre circulaire (§ 4.3), en considérant une projection sur la base des fonctions propres POD. Un modèle d'ordre réduit de dynamique non contrôlée, sera tout d'abord construit, puis, la méthode dite de la *fonction de contrôle* sera introduite (Graham *et al.*, 1999a), permettant ainsi de faire intervenir explicitement dans le modèle réduit la loi de contrôle. Pour réduire l'ordre du modèle POD, les modes POD d'indice supérieur à un certain seuil sont alors négligés. Une méthode

permettant de modéliser les interactions entre les modes calculés par POD ROM et les modes non pris en compte dans le système réduit est présentée, avec pour objectif d'améliorer la représentativité dynamique du modèle réduit (§ 4.4). Enfin, afin de mettre en évidence la capacité du modèle réduit à prévoir d'éventuelles modifications de dynamique, ce modèle réduit est utilisé dans une étude de stabilité linéaire avec pour objectif de déterminer les paramètres critiques des deux premières bifurcations de l'écoulement (§ 4.5).

4.2 Projection de Galerkin

Après avoir présenté très brièvement quelques généralités sur la projection de Galerkin (§ 4.2.1), nous nous attacherons à appliquer ce type de méthode aux fonctions propres POD (§ 4.2.2). Enfin, la prise en compte des conditions aux limites sera abordée (§ 4.2.3).

4.2.1 Généralités

La projection de Galerkin est un cas particulier des *méthodes à résidus pondérés*. Ces méthodes sont généralement utilisées pour résoudre des systèmes d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles ou encore des équations intégrales. Par exemple, considérons l'équation

$$\mathcal{L}(u) = 0, \quad (4.3)$$

où \mathcal{L} est un opérateur différentiel et $u(\mathbf{x})$ le champ scalaire inconnu défini sur un domaine Ω . On cherche une approximation, \tilde{u} , de la solution exacte, u . Le résidu de l'équation (4.3) est défini par

$$r(\tilde{u}) = \mathcal{L}(\tilde{u}) \neq 0. \quad (4.4)$$

La meilleure approximation possible pour u correspond à celle qui réduit au minimum le résidu r pondéré par w_j , fonctions quelconques, dites fonctions de pondération ou encore fonctions test, et cela de manière intégrale sur tout le domaine Ω . La méthode des résidus pondérés consiste donc à annuler le résidu pondéré R_j , défini ainsi :

$$R_j = \int_{\Omega} w_j r \, d\Omega = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Dans la méthode de Galerkin, les fonctions de poids sont choisis identiques aux fonctions de base utilisées dans le développement de la solution approchée. Par conséquent, si \tilde{u} est approximée par

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

où $\varphi_i(\mathbf{x})$ sont les fonctions de base et χ_i les coefficients à déterminer, alors les fonctions de poids sont telles que $w_j = \varphi_j(\mathbf{x}), j = 1, \dots, +\infty$. Le fait que u appartienne à un espace vectoriel de dimension infinie est une difficulté pratique. L'étape de discrétisation de la méthode de Galerkin consiste à tronquer la somme intervenant dans l'équation (4.6) à un indice fini, noté i_{max} , transformant ainsi le problème en dimension finie. Par conséquent, l'équation (4.5) devient :

$$\int_{\Omega} \varphi_j(\mathbf{x}) \mathcal{L}(\tilde{u}) \, d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, i_{max} \quad (4.7)$$

soit encore, en utilisant un produit scalaire homogène à celui considéré dans l'équation (4.2) :

$$\left(\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^{i_{max}} \chi_i \varphi_i(\mathbf{x}) \right), \varphi_j \right) = 0 \quad j = 1, \dots, i_{max}. \quad (4.8)$$

Finalement, la projection de Galerkin revient à imposer aux i_{max} produits scalaires définis par l'équation (4.8) de s'annuler.

Pour qu'une telle méthode fonctionne (Rempfer, 1996), les deux conditions suivantes doivent être vérifiées :

1. les fonctions de base $\varphi_i(\mathbf{x})$ doivent former un espace complet et, pour des raisons pratiques qui deviendront évidentes à la section suivante, il est préférable que celles-ci forment une base orthonormée.
2. les fonctions de base doivent satisfaire les conditions aux limites du problème.

4.2.2 Modèles d'ordre faibles basés sur la POD

En raison de leurs propriétés (§ 3.4.2), les fonctions de base POD, $\Phi(\mathbf{x})$, sont bien appropriées pour être utilisées dans une projection de Galerkin.

Considérons les équations de Navier-Stokes écrites pour un fluide incompressible étudié dans un domaine Ω :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad (4.9)$$

où \mathbf{F} est un opérateur différentiel spatial, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Omega$ et $t \geq 0$. A ces équations sont ajoutées des conditions initiales $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ et des conditions aux limites. En Mécanique des Fluides, ces équations peuvent être utilisées dans le cadre d'un problème de contrôle (instationnaire) de paroi. Supposons que les frontières Γ du domaine Ω peuvent se décomposer en des frontières Γ_c sur lesquelles le contrôle est appliqué et des frontières $\Gamma \setminus \Gamma_c$ non contrôlées. Les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \gamma(t)\mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_c, \quad (4.10a)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \Gamma_c. \quad (4.10b)$$

Dans ces équations, $\gamma(t)$ peut être interprété comme la variation temporelle de la fonction spatiale $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ sur Γ_c . Cette loi de contrôle $\gamma(t)$ peut par exemple correspondre à un cas de soufflage-aspiration sur une partie d'une aile d'avion pour un profil de vitesse $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ identique à celui représenté sur la figure 4.2.

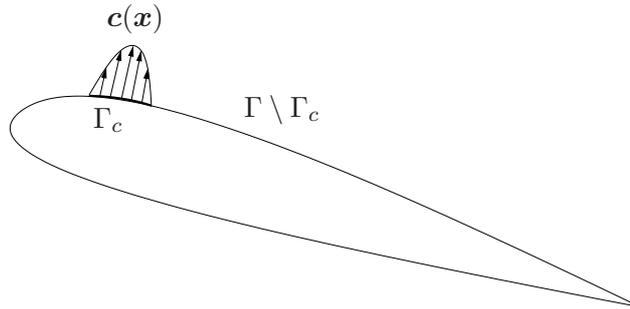


FIGURE 4.2 – Représentation de la fonction spatiale $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ associée aux conditions aux limites instationnaires contrôlées ($\mathbf{c}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ sur Γ_c et $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_c$).

Le champ vectoriel \mathbf{u} peut être projeté sur l'espace de dimension N_{POD} défini par les vecteurs propres POD Φ_i , correspondant aux modes les plus énergétiques de l'écoulement²:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_{POD}} a_i(t)\Phi_i(\mathbf{x}). \quad (4.11)$$

En introduisant l'expression (4.11) de \mathbf{u} dans l'équation (4.9), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N_{POD}} \frac{da_i}{dt} \Phi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \left(\sum_{i=1}^{N_{POD}} a_i(t)\Phi_i(\mathbf{x}) \right).$$

Les fonctions Φ_i formant une base, la relation précédente se réécrit :

$$\sum_{i=1}^{N_{POD}} \frac{da_i}{dt} \Phi_i(\mathbf{x}) = \sum_j \mathcal{F}_j(a_1, a_2, \dots, a_{N_{POD}}) \Phi_j(\mathbf{x}). \quad (4.12)$$

2. On verra à la section 4.2.3 que d'autres décompositions du champ de vitesse sont envisageables.

Compte tenu de l'orthonormalité des fonctions propres POD, une projection de Galerkin des équations (4.12) sur la base Φ_n donne :

$$\frac{da_n(t)}{dt} = \mathcal{F}_n(a_1, a_2, \dots, a_{N_{POD}}), \quad n = 1, \dots, N_{POD}. \quad (4.13)$$

L'opérateur \mathbf{F} représentant les termes convectifs et diffusifs des équations de Navier-Stokes, l'opérateur \mathcal{F} fait en général intervenir des combinaisons linéaires et quadratiques des coefficients temporels $a_n(t)$.

Pour que le système (4.13) soit bien posé, on lui ajoute des conditions initiales $a_n(t=0) = a_n^0$ avec $a_n^0 = (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \Phi_n(\mathbf{x}))$.

En résumé, nous avons montré qu'en réalisant une projection de Galerkin sur les fonctions de base POD, les équations de Navier-Stokes pouvaient être approchées par un système dynamique d'ordre réduit (non-linéaire), représenté mathématiquement par des Equations Différentielles Ordinaires (*Ordinary Differential Equations*, ODE).

4.2.3 Conditions aux limites

Au chapitre 3, nous avons montré que les fonctions de base POD Φ_n peuvent s'écrire de manière linéaire en fonction des réalisations $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Plus précisément, on a

$$\Phi_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{T\lambda_n} \int_T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) a_n(t) dt, \quad (4.14)$$

où λ_n représente les valeurs propres de la matrice de corrélation temporelle.

La relation (4.14) montre que les fonctions de base Φ_n héritent des propriétés qui peuvent s'écrire de manière linéaire et homogène en fonction des champs de vitesse \mathbf{u} . En particulier, dans le cas où les équations de Navier-Stokes sont résolues sur un domaine muni de conditions aux limites homogènes, *i.e.* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$, alors les fonctions de base POD vérifient également des conditions aux limites homogènes. Dans ce cas, la décomposition suivante, réalisée sur les N_{gal} premiers modes POD, peut être utilisée :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}),$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est une approximation de Galerkin de la solution exacte \mathbf{u} des équations de Navier-Stokes.

Si maintenant les équations de Navier-Stokes sont munies de conditions aux limites non-homogènes pour les vitesses, *i.e.* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{0}$ sur certaines frontières du domaine de calcul, alors les fonctions de base POD ne peuvent plus être utilisées dans la projection de Galerkin comme le montre l'équation (4.14). L'objectif est alors de transformer le problème initial muni de conditions aux limites non-homogènes en un problème muni de conditions aux limites homogènes.

Si les conditions aux limites sont indépendantes du temps, *i.e.* si $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, Sirovich (1987a) propose de calculer une base POD correspondante aux fluctuations des champs de vitesse autour de la moyenne temporelle $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$. Les fonctions de base POD sont alors estimées à l'aide des données modifiées $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{N_t}) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x})\}$ où N_t est le nombre de réalisations disponibles. Par construction, les champs $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ et donc $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ sont à divergence nulle. Le champ moyen $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ vérifie les conditions aux limites non-homogènes du problème et donc, le champ $\mathbf{u}_{POD}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ vérifie, lui, des conditions aux limites homogènes.

En résumé, la base POD peut être déterminée dans le cas de conditions aux limites non-homogènes et indépendantes du temps par la décomposition suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}). \quad (4.15)$$

Cette relation peut s'écrire de manière condensée

$$\sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t),$$

en posant

$$\tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}),$$

la décomposition du champ de vitesse sur N_{gal} modes propres POD dans le cas d'un système non contrôlé.

Les conditions aux limites non-homogènes peuvent également dépendre du temps, *i.e.* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Ce cas est très courant dans des problèmes de contrôle instationnaire avec contrôle frontière par exemple. Afin de rendre les conditions aux limites homogènes, Graham *et al.* (1999a,b), Ravindran (2000a,b) et Fahl (2000) proposent la méthode de la fonction de contrôle, qui consiste à utiliser la décomposition suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}). \quad (4.16)$$

Cette relation peut également s'écrire de façon condensée

$$\sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}_c^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t),$$

en posant

$$\tilde{\mathbf{u}}_c^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) - \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}),$$

la décomposition du champ de vitesse sur N_{gal} modes propres POD dans le cas d'un système contrôlé.

Ici $\mathbf{u}_c(\mathbf{x})$ est un champ de vitesse de référence traduisant de quelle manière le contrôle $\gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x})$ affecte l'écoulement. Le champ $\mathbf{u}_c(\mathbf{x})$ correspond aux conditions aux limites suivantes (voir figure 4.2) :

$$\begin{cases} \mathbf{c}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Gamma_c \\ \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma_c. \end{cases}$$

Ainsi, le champ $\tilde{\mathbf{u}}_c^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) - \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x})$ vérifie des conditions aux limites homogènes. Par définition, les fonctions de base POD vérifient alors des conditions aux limites homogènes et peuvent donc être utilisées dans une projection de Galerkin.

4.3 Application au cylindre

Dans cette section, la méthode des snapshots décrite au paragraphe 3.5.4, va être mise en œuvre afin d'extraire les modes énergétiques dominants, correspondant à l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour un nombre de Reynolds égal à 200. Les modes les plus énergétiques seront alors utilisés pour déterminer un modèle dynamique d'ordre réduit, par projection de Galerkin du système de Navier-Stokes sur ces modes.

Afin de simplifier le problème, on s'attachera à générer, dans un premier temps (§ 4.3.1), un modèle d'ordre réduit pour l'écoulement autour d'un cylindre stationnaire (conditions aux limites non homogènes, mais stationnaires). Ensuite, les paramètres de contrôle faisant intervenir des conditions aux limites non homogènes et instationnaires, ceux-ci seront incorporés dans le modèle à l'aide de la méthode de la fonction de contrôle (§ 4.3.2).

4.3.1 POD du cylindre stationnaire

Détermination des fonctions de base POD

Afin de déterminer les fonctions de base POD dans le cas du cylindre stationnaire, la décomposition (4.15) est utilisée. En définissant $\tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x})$, le calcul des fonctions de base s'effectue en plusieurs étapes :

1. Calcul du champs moyen $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ obtenu sur l'ensemble des réalisations $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)\}_{i=1, \dots, N_t}$:

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i).$$

2. Calcul de la matrice de corrélations temporelles C de composantes c_{ij} :

$$c_{ij} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t_i) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t_j) d\mathbf{x}.$$

3. Calcul des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_t}$ et des vecteurs propres temporels³ $\Psi_1, \dots, \Psi_{N_t}$ de la matrice C .
4. Calcul des fonctions POD spatiales Φ_i par combinaison linéaire des vecteurs propres temporels Ψ_i et des réalisations $\tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}$:

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_t} \Psi_i(t_j) \tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t_j).$$

5. Normalisation des fonctions de base :

$$\Phi_i = \frac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|}.$$

Les valeurs propres λ_i , $i = 1, \dots, 20$, obtenues en appliquant cet algorithme à un jeu de 305 réalisations réparties uniformément sur trois périodes de Von Kármán (environ $T = 15,2$) sont représentées sur la figure 4.3. On constate que ces valeurs propres, tracées en représentation semi-logarithmique, décroissent très rapidement. Le spectre présente également des couples de valeurs propres approximativement de même amplitude, chaque couple étant séparé de l'autre par environ un ordre de grandeur. Ce phénomène est caractéristique d'un problème aux valeurs propres quasi dégénéré, et traduit la présence dominante dans l'organisation physique de l'écoulement d'ondes planes progressives, ce que l'on retrouvera directement dans la structuration des modes propres spatiaux.

La figure 4.4 représente les modules des six premiers modes POD. On constate que les deux premiers modes sont associés aux deux modes anti-symétriques de l'allée tourbillonnaire de Von Kármán. Les modes 3 et 4 correspondent à une correction apportée à cette projection et modélisent des structures plus fines. Enfin, les modes 5 et 6 représentent une correction d'un ordre encore inférieur, et permettent de modéliser des structures toujours plus fines.

Détermination des coefficients de projection temporels

Les coefficients de projection temporels $a_{\tau_i}(t) = a_i(t)$ peuvent se calculer simplement en projetant la relation (4.15) sur la base POD. On a donc :

$$\left(\tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t), \Phi_j(\mathbf{x}) \right) = \left(\sum_{i=1}^{N_{POD}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}), \Phi_j(\mathbf{x}) \right).$$

Compte tenu de l'orthonormalité de la base POD $\{\Phi_1, \dots, \Phi_{N_{POD}}\}$, les coefficients de projection temporels se déterminent simplement de la manière suivante :

3. Chacun des vecteurs propres temporels s'écrit $\Psi_j = (\Psi_j(t_1), \Psi_j(t_2), \dots, \Psi_j(t_{N_t}))^T$.

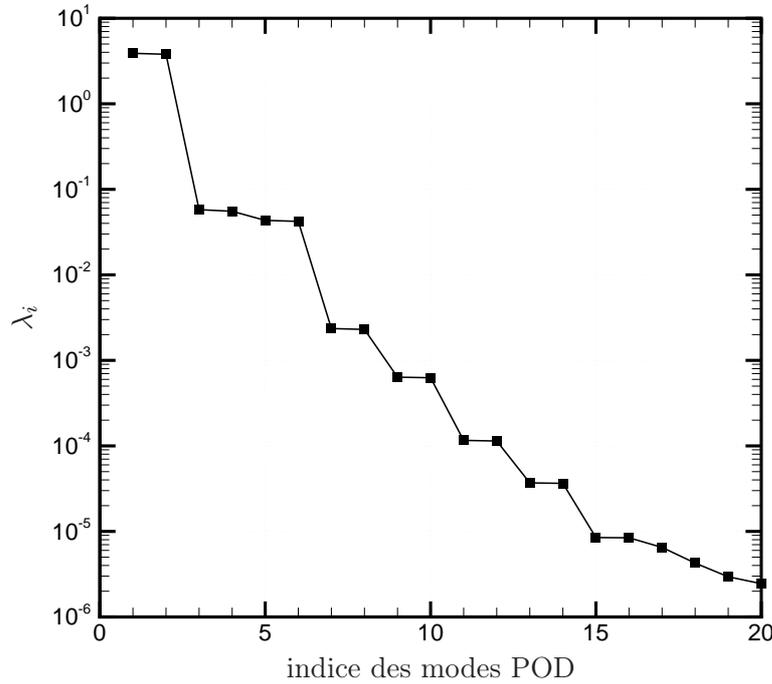


FIGURE 4.3 – Valeurs propres de la matrice de corrélations temporelles dans le cas du cylindre non contrôlé ($\gamma = 0$).

$$a_j(t) = \left(\tilde{\mathbf{u}}_s^{N_{gal}}(\mathbf{x}, t), \Phi_j(\mathbf{x}) \right).$$

La figure 4.5 représente l'évolution temporelle des 6 premiers coefficients de projection obtenus par simulation numérique des équations de Navier-Stokes pour $\gamma = 0$. Une forte périodicité est observée qui traduit l'évolution temporelle de l'allée tourbillonnaire de Von Kármán. Par ailleurs, on constate que l'évolution temporelle de chacun des modes de rang impair se déduit aisément de celle des modes de rang pair par simple déphasage. Ce phénomène est bien connu (Cordier, 1996, par exemple) et ne fait que traduire, encore une fois après le spectre des valeurs propres et la structuration spatiale des modes POD, qu'en première approximation, les modes dominants de l'écoulement non contrôlé correspondent à des ondes planes progressives qui se propagent dans le domaine.

Détermination des coefficients de prédiction temporels

Les coefficients de prédiction temporels sont, quant à eux, calculés par résolution d'un système dynamique d'ordre réduit. Ce système est déterminé en réalisant une projection de Galerkin des équations de quantité de mouvement du modèle de Navier-Stokes sur les fonctions de base POD, déterminées précédemment :

$$\left(\Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \left(\Phi_i, -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right).$$

Après intégrations par parties, en utilisant la formule de Green, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \left(\Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= (p, \nabla \cdot \Phi_i) - \frac{1}{Re} ((\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \mathbf{u}) \\ &\quad - [p \Phi_i] + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \Phi_i] \end{aligned} \quad (4.17)$$

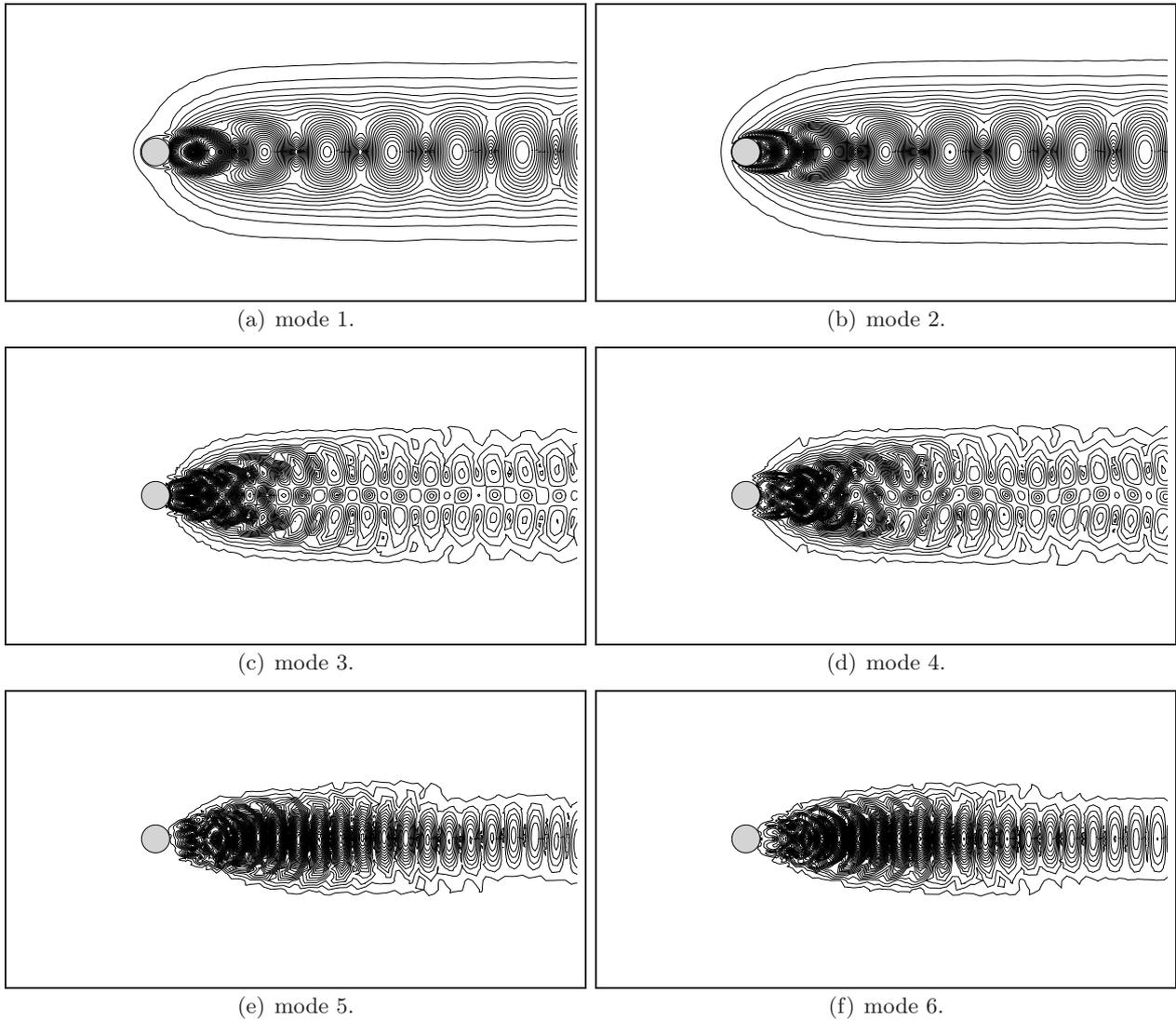


FIGURE 4.4 – Isovaleurs de la norme des 6 premiers modes propres POD en écoulement non contrôlé ($\gamma = 0$).

$$\text{avec } [\mathbf{a}] = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \text{ et } (A, B) = \int_{\Omega} A : B d\Omega = \sum_{i,j} \int_{\Omega} A_{ij} B_{ji} d\Omega.$$

On constate que des termes faisant intervenir le champ de pression sont présents dans l'équation (4.17). Le champ de pression ne se décomposant pas *a priori* sur la même base que les champs de vitesse, la pression ne peut pas être facilement utilisé dans une projection de Galerkin. On souhaite alors éliminer les termes de pression indésirables. Le développement du champ de vitesse (4.15) est alors utilisé. L'introduction de ce développement dans l'équation de continuité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ impose aux fonctions de base d'être à divergence nulle, soit $\nabla \cdot \Phi_i = 0$. Le terme $(p, \nabla \cdot \Phi_i)$ présent dans l'équation (4.17) est alors égal à zéro.

Le terme de frontière $-[p \Phi_i]$ peut être éliminé de différentes manières :

Pression nulle Ce terme s'annule sur toutes les frontières où la pression de référence p est égale à zéro⁴. Ceci est couramment le cas sur la frontière d'entrée, Γ_e , du domaine de calcul. Parfois, cette condition est appliquée sur la frontière de sortie pour des écoulements cisailés (Deane *et al.*, 1991; Karniadakis *et al.*,

⁴ La pression de référence, fixée par les conditions initiales du problème, est arbitraire. Un choix $p(\mathbf{x}) = 0$ est tout à fait possible.

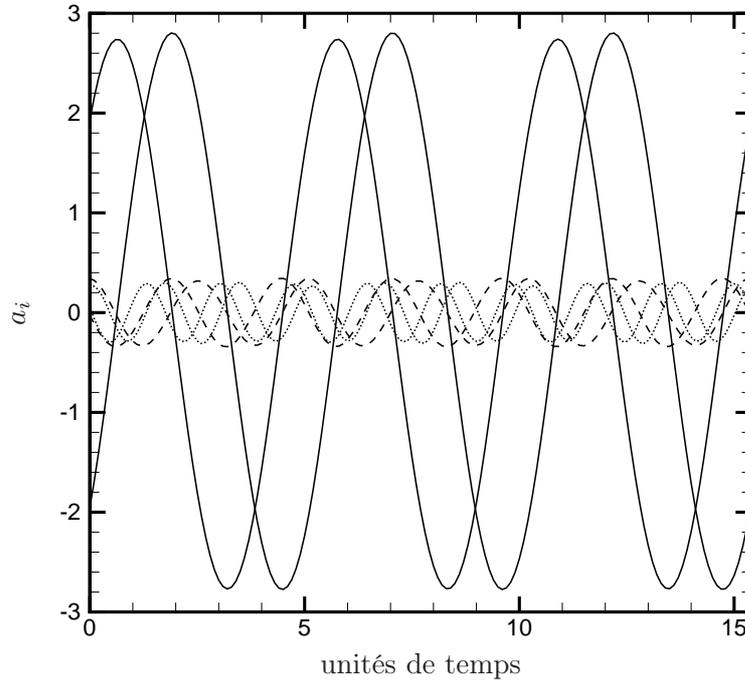


FIGURE 4.5 – Evolution temporelle des 6 premiers coefficients de projection en écoulement non contrôlé ($\gamma = 0$). — a_1 et a_2 , - - - a_3 et a_4 , \cdots a_5 et a_6 .

1991). Des précautions doivent néanmoins être prises. Il convient notamment de vérifier que la frontière de sortie est située assez loin du lieu de naissance des tourbillons.

Conditions aux limites homogènes Le terme de pression s'annule sur les frontières où des conditions aux limites homogènes peuvent être obtenues pour les fonctions de base Φ_i , *i.e.* $\Phi_i = \mathbf{0}$. C'est le cas, par exemple, de domaines d'écoulements possédant des frontières rigides (Fahl, 2000, dans le cas d'une cavité). Dans notre étude, la frontière du cylindre Γ_c satisfait cette condition pour un écoulement non contrôlé.

Conditions aux limites périodiques Lorsque des conditions aux limites périodiques sont appliquées sur les frontières du domaine de calcul, le terme de pression s'annule (Deane *et al.*, 1991). Pour un écoulement de canal simulé avec des conditions aux limites périodiques, le terme de pression a alors une contribution nulle.

Frontières parallèles à l'écoulement Ce terme s'annule également sur les frontières qui sont localement parallèles à l'écoulement car on a alors $\Phi_i \cdot \mathbf{n} = 0$. Cette condition est vérifiée sur les frontières Γ_{inf} et Γ_{sup} . En cas d'application du contrôle sur le cylindre, cette condition est également vérifiée sur la frontière Γ_c .

Conditions aux limites "naturelles" La combinaison du terme de pression $-[p \Phi_i]$ et du terme de vitesse $\frac{1}{Re}[(\nabla \otimes \mathbf{u}) \Phi_i]$, peut s'annuler. Cette combinaison est principalement effectuée sur la frontière de sortie où l'on impose les conditions aux limites suivantes (Sani et Gresho, 1994; Ravindran, 2000a):

$$-p + \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ces conditions, très utilisées en éléments finis (Ravindran, 1999), sont censées laisser sortir librement les tourbillons du domaine de calcul. Cependant, par leur manque de justifications physiques, ces conditions

n'ont pas été utilisées dans ce mémoire. Des conditions aux limites de type non-réfléctif (§ 1.3) ont été utilisées afin de réduire la taille du maillage utilisé pour la discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes (chapitre 1).

Dans notre étude, le terme $-[p \Phi_i]$ s'annule sur toutes les frontières du domaine de calcul, excepté sur la frontière de sortie Γ_s . Bien que la contribution de ce terme soit très importante pour la stabilité du système dynamique d'ordre réduit (Noack *et al.*, 2003, 2004), ce terme sera négligé dans un premier temps. Une erreur est alors commise dans la construction du système dynamique. Néanmoins, cette erreur peut être compensée *a posteriori* par une méthode de stabilisation décrite à la section 4.4.2.

On considère alors l'équation suivante :

$$\left(\Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\frac{1}{Re} ((\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \Phi_i]. \quad (4.18)$$

L'introduction du développement (4.15) dans l'équation (4.18) donne le système dynamique suivant :

$$\frac{d a_i(t)}{d t} = \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{POD}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{POD}} \sum_{k=1}^{N_{POD}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t), \quad (4.19)$$

muni de la condition initiale

$$a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t=0), \Phi_i(\mathbf{x})) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_{POD}.$$

Les coefficients \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} intervenant dans le système dynamique (4.19) s'écrivent :

$$\mathcal{A}_i = -(\Phi_i, (\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_m) - \frac{1}{Re} ((\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \mathbf{u}_m) + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}_m) \Phi_i]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ij} = & -(\Phi_i, (\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \Phi_j) - (\Phi_i, (\Phi_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_m) - \frac{1}{Re} ((\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \Phi_j) \\ & + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \Phi_j) \Phi_i] \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}_{ijk} = -(\Phi_i, (\Phi_j \cdot \nabla) \Phi_k).$$

4.3.2 Incorporation du contrôle dans le modèle POD

La méthode générale est identique à celle présentée au paragraphe précédent. Les seules différences sont :

- la méthode de la fonction de contrôle est mise en œuvre : la décomposition (4.16) est utilisée afin de prendre en compte le contrôle dans le système POD.
- le champ moyen est calculé de la façon suivante :

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) - \gamma(t_i) \mathbf{u}_c(\mathbf{x})).$$

Le système dynamique représentant l'écoulement contrôlé peut finalement s'écrire pour $i = 1, \dots, N_{POD}$:

$$\begin{aligned} \frac{d a_i(t)}{d t} = & \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{POD}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{POD}} \sum_{k=1}^{N_{POD}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ & + \mathcal{D}_i \frac{d \gamma}{d t} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma + \mathcal{G}_i \gamma^2. \end{aligned} \quad (4.20a)$$

Ces équations sont munies de la condition initiale

$$a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \Phi_i(\mathbf{x})). \quad (4.20b)$$

Des termes supplémentaires \mathcal{D} , \mathcal{E} , \mathcal{F} et \mathcal{G} interviennent dans le système (4.20). Ces termes dépendent de la fonction de contrôle, \mathbf{u}_c , et s'écrivent :

$$\mathcal{D}_i = -(\Phi_i, \mathbf{u}_c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i = & -(\Phi_i, (\mathbf{u}_c \cdot \nabla) \mathbf{u}_m) - (\Phi_i, (\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_c) - \frac{1}{Re} ((\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \mathbf{u}_c) \\ & + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}_c) \Phi_i] \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{ij} = -(\Phi_i, (\Phi_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_c) - (\Phi_i, (\mathbf{u}_c \cdot \nabla) \Phi_j)$$

$$\mathcal{G}_i = -(\Phi_i, (\mathbf{u}_c \cdot \nabla) \mathbf{u}_c).$$

4.4 Intégration et stabilisation du modèle d'ordre faible

4.4.1 Intégration du système POD

Afin de déterminer des fonctions de base POD susceptibles de décrire au mieux la dynamique contrôlée du cylindre, nous construisons une base de données qui correspond à l'écoulement généré en faisant osciller sinusoidalement le cylindre avec une vitesse tangentielle $\gamma(t) = A \sin(2\pi St_f t)$, d'amplitude égale à $A = 2$ et de nombre de Strouhal égal à $St_f = 0,5$.

La matrice de corrélation C est formée à partir d'un jeu de $N_{POD} = 361$ réalisations de l'écoulement contrôlé obtenues à des intervalles de temps réguliers sur 18 unités de temps ($\Delta t = 0,05$).

La figure 4.6 représente les modules des 6 premiers modes POD. Les deux premiers modes (figures 4.6(a) et 4.6(b)) ont globalement des structures semblables aux modes correspondants obtenus en écoulement non contrôlé (figures 4.4(a) et 4.4(b)), excepté autour du cylindre, où la dynamique est modélisée principalement par les modes 3 et 4. Les modes 5 et 6 correspondent à des corrections apportées aux modes précédents afin de modéliser la dynamique contrôlée.

La figure 4.7 représente l'évolution du contenu énergétique des M premiers modes POD en utilisant comme mode de représentation le contenu informationnel relatif, RIC , défini par

$$RIC(M) = \frac{\sum_{k=1}^M \lambda_k}{\sum_{k=1}^{N_{POD}} \lambda_k}. \quad (4.21)$$

On constate sur la figure 4.8 que les 8 premiers modes (soit moins de 4% du nombre total de modes POD) contiennent plus de 99,9% de l'énergie cinétique de l'écoulement. Les 14 premiers modes contiennent plus de 99,98% de l'énergie cinétique de l'écoulement. En raison des faibles coûts de calcul intervenants dans la résolution du système POD ROM (décrit au paragraphe suivant), dans ce qui suit, $N_{gal} = 14$ modes seront retenus dans le système dynamique réduit (4.20).

Méthodes de résolutions du système POD ROM

Afin de déterminer la méthode d'intégration la plus adaptée pour résoudre le système (4.20), et ceci tant en terme de qualité des résultats qu'en terme de temps de calcul, différentes méthodes classiques de résolution numérique seront évaluées : méthodes d'Euler, de Runge-Kutta à l'ordre 2 (RK2) et de Runge-Kutta à l'ordre 4 (RK4). Toutes les intégrations numériques sont réalisées sur 18 unités de temps, pour $N_{gal} = 14$.

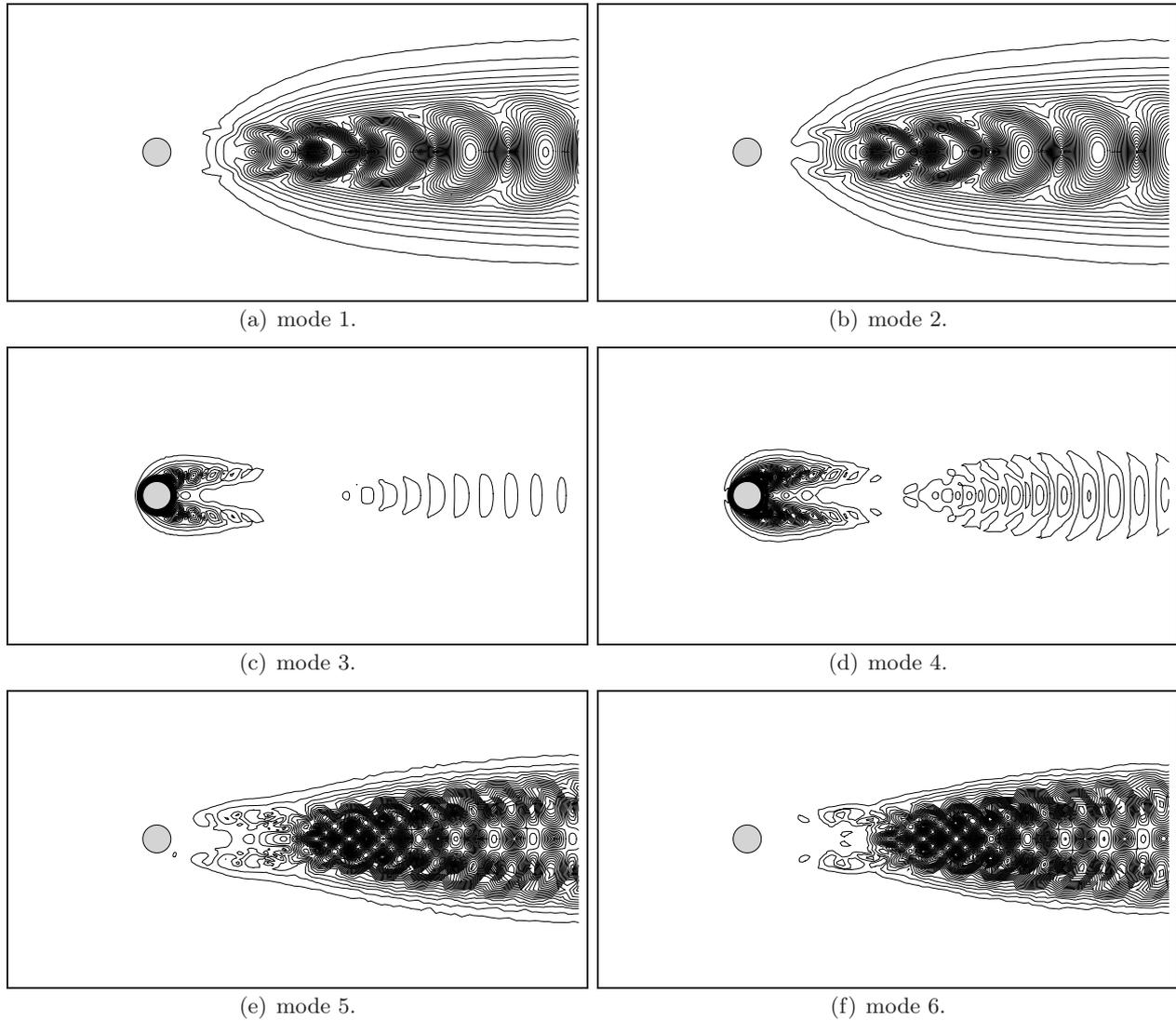


FIGURE 4.6 – Isovaleurs de la norme des 6 premiers modes propres POD en écoulement contrôlé : $\gamma(t) = A \sin(2\pi St_f t)$ avec $A = 2$ et $St_f = 0,5$.

Les résultats obtenus sont synthétisés dans la table 4.1. Pour chaque méthode, le temps nécessaire à la résolution du système dynamique (en secondes), ainsi que l'erreur de résolution, sont évaluées en fonction du pas de temps d'intégration, Δt . L'erreur de reconstruction est évaluée entre les coefficients de prédiction temporels $a_n(t)$ et les coefficients "exacts" $a_n^*(t)$. Le système dynamique (4.20) ne possédant pas de solution analytique, les coefficients "exacts" $a_n^*(t)$ sont déterminés à l'aide de la méthode d'intégration *a priori* la plus performante, à savoir la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 utilisant un pas de temps très faible ($\Delta t = 10^{-4}$). Cette erreur est définie de la manière suivante :

$$E_2(t) = \left(\sum_{i=1}^{N_{gal}} (a_i(t) - a_i^*(t))^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} .$$

L'erreur totale, définie comme la moyenne temporelle de l'erreur précédente sur une période, est également utilisée.

$$\bar{E}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T E_2(t) dt.$$

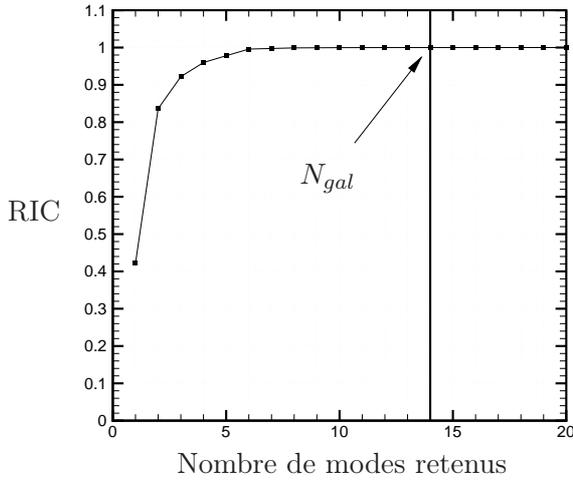


FIGURE 4.7 – Énergie cinétique relative en fonction du nombre de modes POD retenus.

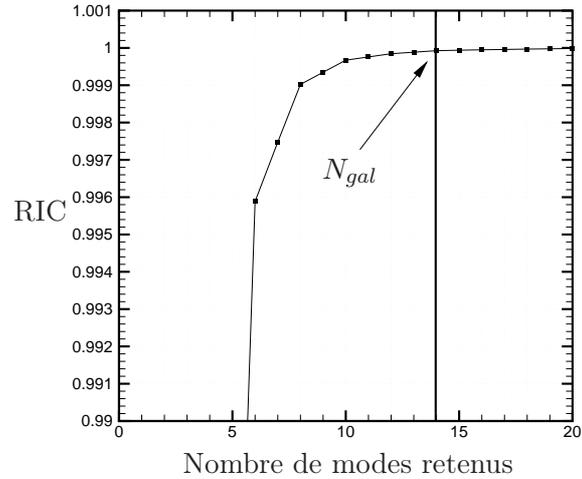


FIGURE 4.8 – Énergie cinétique relative en fonction du nombre de modes POD retenus (zoom).

Δt	Euler		RK2		RK4	
	temps	\bar{E}_2	temps	\bar{E}_2	temps	\bar{E}_2
$1 \cdot 10^{-1}$	-	-	0,78	$1,12 \cdot 10^{-1}$	1,55	$1,42 \cdot 10^{-3}$
$5 \cdot 10^{-2}$	-	-	1,50	$2,77 \cdot 10^{-2}$	2,94	$1,09 \cdot 10^{-4}$
$1 \cdot 10^{-2}$	3,75	$1,65 \cdot 10^{-1}$	7,51	$1,09 \cdot 10^{-3}$	14,64	$1,62 \cdot 10^{-7}$
$5 \cdot 10^{-3}$	7,50	$7,77 \cdot 10^{-2}$	14,64	$2,73 \cdot 10^{-4}$	29,12	$3,12 \cdot 10^{-9}$
$1 \cdot 10^{-3}$	37,86	$1,49 \cdot 10^{-2}$	74,41	$1,09 \cdot 10^{-5}$	146,12	$2,44 \cdot 10^{-11}$
$5 \cdot 10^{-4}$	76,75	$7,40 \cdot 10^{-3}$	147,01	$2,73 \cdot 10^{-6}$	292,84	$9,78 \cdot 10^{-14}$
$1 \cdot 10^{-4}$	397,96	$1,47 \cdot 10^{-3}$	754,45	$1,10 \cdot 10^{-7}$	1457,07	0

TABLE 4.1 – Comparaison de l'efficacité des méthodes de résolution numérique pour le système POD ROM (intégrations sur 18 unités de temps).

La figure 4.9 représente l'évolution temporelle de l'erreur, $E_2(t)$, entre les coefficients de prédiction temporels $a_n(t)$ et les coefficients temporels "exacts" $a_n^*(t)$. L'erreur d'intégration diminue avec le pas de temps. L'évolution de l'erreur totale en fonction du pas de temps d'intégration du système POD ROM est représentée sur la figure 4.10. Les ordres de précision des trois méthodes testées peuvent être retrouvés. En effet, pour la méthode d'Euler, on a

$$\ln(\bar{E}_2) = 1 \ln(\Delta t) + C_1.$$

La précision de résolution temporelle est donc égale à 1, soit Δt .

Pour la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 2, on a

$$\ln(\bar{E}_2) = 2 \ln(\Delta t) + C_2.$$

La précision de résolution temporelle est donc égale à 2, soit $(\Delta t)^2$.

Pour la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4, on a

$$\ln(\bar{E}_2) = 4 \ln(\Delta t) + C_3.$$

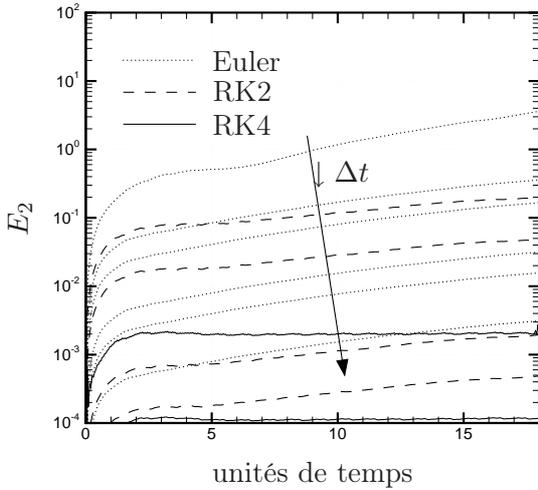


FIGURE 4.9 – Evolution temporelle de l'erreur en norme \mathcal{L}_2 entre les coefficients de prédiction $a_n(t)$ et les coefficients temporels "exacts" $a_n^*(t)$.

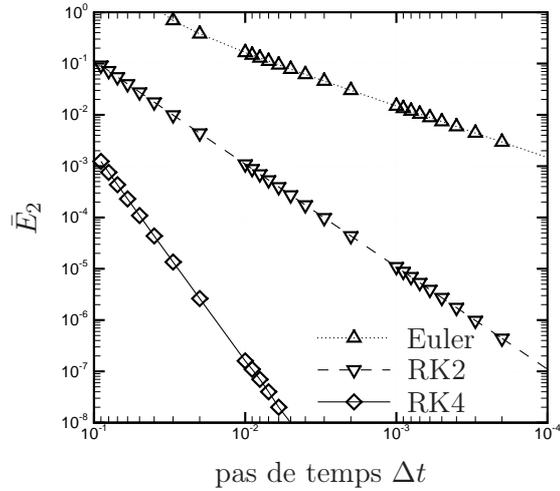


FIGURE 4.10 – Evolution de l'erreur totale en fonction du pas de temps d'intégration du système POD ROM.

La précision de résolution temporelle est donc égale à 4, soit $(\Delta t)^4$.

Ces résultats sont bien connus, et donnent par ailleurs leur nom aux méthodes de Runge-Kutta.

La méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 est évidemment la plus précise. Mais une telle précision est-elle nécessaire? Et le temps associé à la résolution ne devient-il pas prohibitif?

La figure 4.11 représente l'évolution de l'erreur totale en fonction du temps nécessaire à l'intégration du système POD ROM. La figure 4.12 représente l'évolution du temps nécessaire à la résolution du système dynamique en fonction du pas de temps. La méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 permet d'obtenir des erreurs d'intégration très faibles. Des erreurs jusqu'à 10^{-13} peuvent être obtenues⁵. Cependant, des précisions de l'ordre de 10^{-3} peuvent être jugées très satisfaisantes. Pour atteindre cette précision, le temps nécessaire par la méthode d'Euler est égal à 400 secondes (avec $\Delta t = 10^{-4}$), le temps nécessaire par la méthode RK2 est égal à 7 secondes (avec $\Delta t = 10^{-2}$) et le temps nécessaire par la méthode RK4 est égal à 1 seconde (avec $\Delta t = 10^{-1}$).

Les coûts de calcul associés à l'intégration du système POD ROM étant de toute façon négligeables par rapport à ceux correspondants à la résolution du système Navier-Stokes, on peut accepter d'utiliser un pas de temps inférieur, quitte à augmenter très légèrement le temps d'intégration numérique. Or, on constate qu'un pas de temps de 10^{-2} permet de réduire l'erreur jusqu'à une valeur de l'ordre de 10^{-7} par la méthode RK4, et ce, pour un temps d'intégration qui reste tout à fait raisonnable (15 secondes).

Dans la suite de cette étude, le système POD ROM (4.20) sera donc intégré par une méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 avec un pas de 10^{-2} .

Observations

Le système d'équations (4.20) est intégré en temps. La solution de ce système donne un jeu de coefficients de prédiction temporels $a_n(t)$ qui peuvent être comparés avec les coefficients de projection temporels $a_{\tau n}(t)$. Les évolutions temporelles des 6 premiers coefficients $a_n(t)$ et $a_{\tau n}(t)$ sont représentées sur la figure 4.13.

5. Non représenté sur la figure 4.11, voir tableau 4.1.

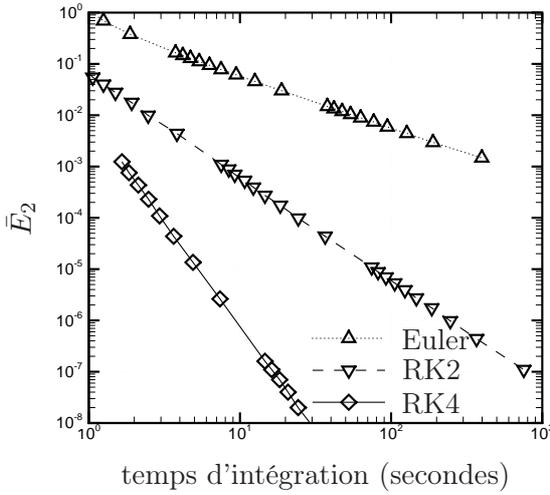


FIGURE 4.11 – Evolution de l'erreur totale en fonction du temps nécessaire à l'intégration du système POD ROM.

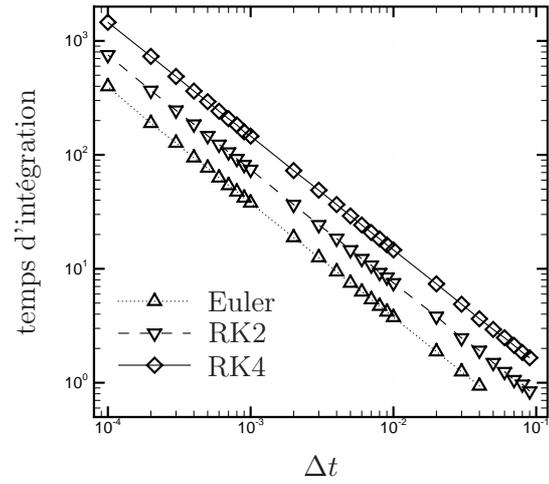


FIGURE 4.12 – Evolution du temps nécessaire à l'intégration du système POD ROM en fonction du pas de temps.

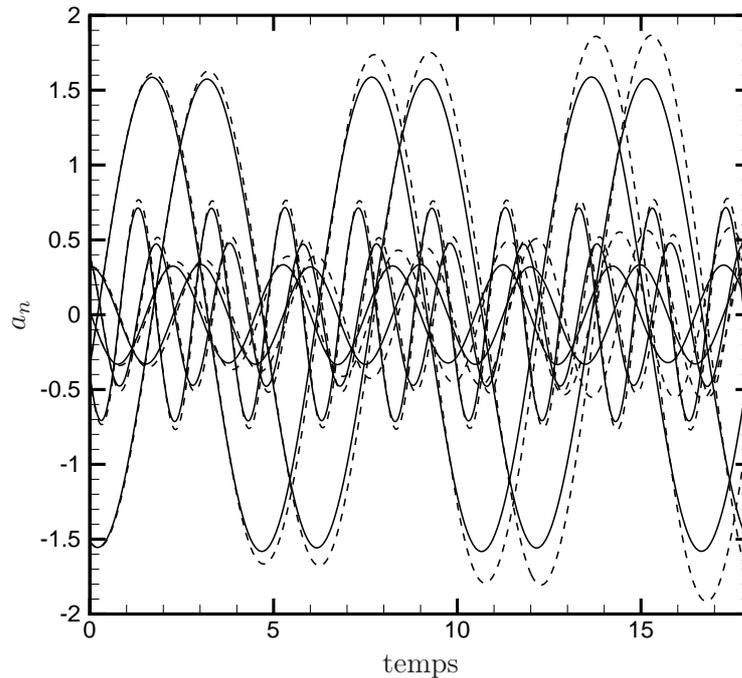


FIGURE 4.13 – Comparaison de l'évolution temporelle des 6 premiers modes propres projetés (—) et prédits (---).

On constate qu'il y a une légère amplification temporelle des modes propres prédits par le système dynamique d'ordre faible, accompagnée d'un léger déphasage. Cette constatation est appuyée par le fait que le contenu informationnel relatif des modes prédits $a_n(t)$ est en moyenne bien plus important que celui des modes projetés $a_{\tau n}(t)$, comme l'illustre la figure 4.14. Il faut cependant tenir compte du fait que l'échelle

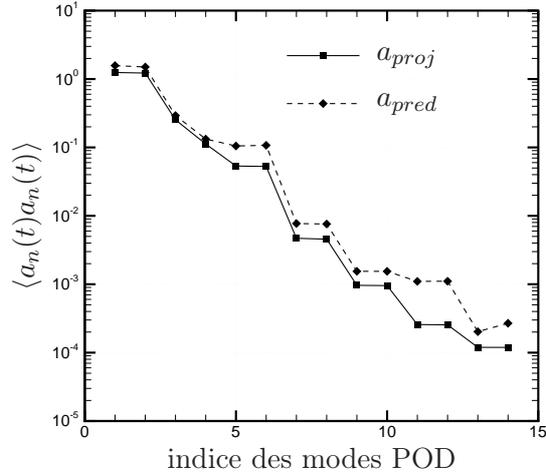


FIGURE 4.14 – Comparaison du contenu énergétique de chaque mode POD estimé respectivement avec les coefficients de projection (POD) et les coefficients de prédiction (POD ROM).

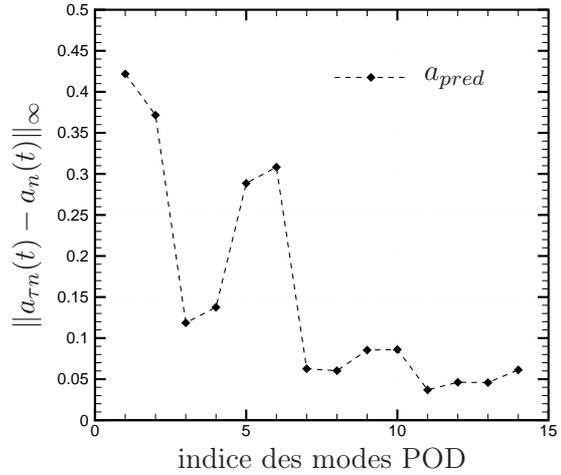


FIGURE 4.15 – Erreur en norme infinie du contenu énergétique de chaque mode POD.

utilisée sur cette figure est de type logarithmique. Le maximum de l'erreur commise ne se situe pas au niveau des modes d'ordre élevé comme pourrait le laisser penser la figure 4.14. La figure 4.15 représente l'erreur entre les modes prédits $a_n(t)$ et les modes projetés $a_{\tau n}(t)$ en norme infinie⁶. La méthode d'intégration du système dynamique est très performante, et de ce fait, l'erreur de reconstruction ne peut pas provenir d'une mauvaise intégration. Une des raisons pour laquelle ces erreurs de reconstruction apparaissent, provient du fait que les termes contenant le champ de pression ont été négligés sur la frontière de sortie dans la construction du système dynamique (4.20).

Cette amplification peut s'avérer très néfaste, notamment dans le cas où ce système serait utilisé comme système d'état dans un processus de contrôle optimal. Dans ce cas, les équations d'état devraient être d'une très grande précision car elles modélisent la physique des phénomènes mis en jeu. Il paraît donc indispensable d'apporter des améliorations à ce système.

4.4.2 Amélioration du système d'ordre faible

On se propose ici d'optimiser le système d'ordre faible afin de restituer au mieux l'information contenue sur chaque mode et cela à chaque instant.

La divergence de la solution du système dynamique (4.20) peut provenir de l'erreur commise en négligeant le terme de pression sur la frontière de sortie lors de la construction des coefficients intervenant dans le système réduit. Une autre explication, plus probable, peut également être avancée. Les fonctions de base POD retenues pour construire un modèle réduit de dynamique sont représentatives des caractères énergétiques dominants d'un écoulement, générés par les grosses et moyennes structures. Les plus petites structures sont, quant à elles, négligées du fait de leur faible apport énergétique (inférieur à 0,1% de l'énergie totale pour $N_{gal} = 14$). Or, la dissipation visqueuse s'effectue principalement dans les petites structures de l'écoulement. Par conséquent, le système POD ne dissipe pas assez d'énergie et les modes prédits s'amplifient au cours du temps (voir figure 4.13). Il convient donc de modéliser les interactions⁷ entre les modes calculés (grandes échelles) et les modes non résolus (petites échelles). Le problème est similaire à celui rencontré en simulations aux grandes échelles (*Large Eddy Simulation*) pour lesquelles une échelle de coupure est introduite, échelle qui sépare les

6. Par définition, $\|y_i(t)\|_\infty = \max_t |y_i(t)|$ où $i = 1, \dots, N_{gal}$ est le numéro d'ordre des modes POD.

7. Récemment, Couplet *et al.* (2003) ont analysé les transferts d'énergie entre modes POD d'un écoulement turbulent de marche descendante. Ils ont montré, que comme c'est le cas en Turbulence pour les modes de Fourier, les échanges d'énergie étaient locaux et étaient globalement dissipatifs.

structures explicitement calculées et celles qui doivent être modélisées. Dans le cas du système réduit POD, cette échelle de coupure, représentée sur la figure 4.16, est confondue avec le nombre de modes Galerkin retenu dans le système. En s'inspirant encore une fois de la Turbulence, une modélisation naturelle d'interactions consiste à ajouter des viscosités artificielles dans le système dynamique POD afin de le rendre plus dissipatif.

Revue des méthodes d'amélioration du système POD ROM

Comme il a été discuté ci-dessus, ajouter des viscosités artificielles au système POD ROM semble une méthode prometteuse pour améliorer la représentativité du modèle réduit.

La méthode la plus évidente est d'ajouter une viscosité globale dans le système POD ROM. Ainsi, la viscosité ν du système POD, représentée par l'inverse du nombre de Reynolds, sera remplacée par $\nu + \nu_\tau$, où, par analogie avec la Turbulence, ν_τ est une viscosité tourbillonnaire à déterminer. La viscosité ν est donc multipliée par un facteur correctif $(1 + c)$ où c est une constante qu'il reste à évaluer. Concrètement, cela revient à remplacer dans le système POD ROM, le terme $\frac{1}{Re}$ par $\frac{1+c}{Re}$.

Rempfer et Fasel (1994) puis Rempfer (1996) prolongent cette idée et considèrent que chaque mode propre dissipe une certaine quantité d'énergie. Selon eux, il est donc préférable d'ajouter une viscosité tourbillonnaire différente sur chacun des modes POD. Ainsi, en conservant le formalisme précédent, et en supposant que ν_i est la viscosité contenue sur le i -ème mode, la viscosité totale sur le i -ème mode devient $\nu_i = \nu \times (1 + c_i)$, ce qui revient encore à remplacer $1/Re_i$ dans le système POD ROM par $(1 + c_i)/Re$. Rempfer considère que cette viscosité tourbillonnaire, prise en compte par l'intermédiaire du terme c_i , varie comme une fonction linéaire des modes POD, soit : $c_i = K \times i$ où K est une constante à déterminer.

Cazemier (1997) et Cazemier *et al.* (1998) utilisent des équations de transport de l'énergie cinétique modale afin de déterminer les viscosités à ajouter au système POD ROM pour le stabiliser. Cazemier suppose que l'absence d'interaction avec les modes non-résolus se traduit sur le système par une croissance linéaire des coefficients de prédiction temporels. Pour éviter ce problème, Cazemier ajoute alors un terme d'amortissement linéaire dans le système. Le système POD ainsi construit s'écrit :

$$\frac{da_i}{dt} = \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_j + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_j a_k + \mathcal{H}_i a_i.$$

L'énergie contenue dans la direction Φ_i , par le i -ème mode, est a_i^2 . La dérivée temporelle de l'énergie du mode i est alors :

$$\frac{da_i^2}{dt} = 2a_i \frac{da_i}{dt}.$$

L'équation de transport de l'énergie s'écrit donc :

$$\frac{da_i^2}{dt} = 2\mathcal{A}_i a_i + 2 \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_i a_j + 2 \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_i a_j a_k + 2\mathcal{H}_i a_i a_i.$$

En moyenne l'énergie doit se conserver *i.e.* $\left\langle \frac{da_i^2}{dt} \right\rangle = 0$. On a donc :

$$2\mathcal{A}_i \langle a_i \rangle + 2 \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} \langle a_i a_j \rangle + 2 \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} \langle a_i a_j a_k \rangle + 2\mathcal{H}_i \langle a_i a_i \rangle = 0.$$

Si la solution du système POD ROM est sur l'attracteur du système dynamique alors les propriétés de la POD imposent que $\langle a_i a_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}$ et que $\langle a_i \rangle = 0$.

Soit :

$$\sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} \langle a_i a_j a_k \rangle + \lambda_i \mathcal{B}_{ii} + \lambda_i \mathcal{H}_i = 0.$$

Finalement, on obtient :

$$\mathcal{H}_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} \langle a_i a_j a_k \rangle - \mathcal{B}_{ii}.$$

Vigo (1998), dans le cas d'un écoulement compressible, propose une méthode d'amortissement en ajoutant un terme cubique dans le système POD ROM. Cette méthode semble assez performante, mais alourdi considérablement les coûts de calcul numériques associés à la résolution du système.

Enfin, très récemment, Sirisup et Karniadakis (2004) ont adapté un modèle particulier de viscosité spectrale dénommé *Spectral Vanishing Viscosity Model* en simulation aux grandes échelles, afin d'améliorer la représentativité d'un modèle réduit de dynamique de sillage sur une très longue période (plus de 1 000 périodes de Von Kármán).

Stabilisation optimal du système POD ROM

On propose ici de déterminer les viscosités tourbillonnaires à ajouter sur chacun des modes POD et cela de manière optimale.

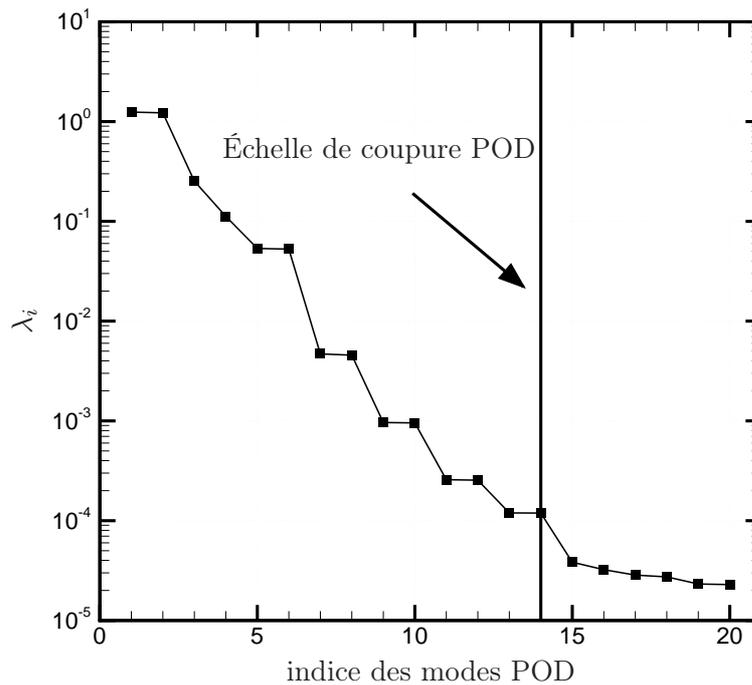


FIGURE 4.16 – *Spectre énergétique et échelle de coupure POD.*

En séparant les termes visqueux et les termes non-visqueux, les coefficients du système dynamique (4.20) peuvent formellement s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= A_i + \frac{1}{Re} \tilde{\mathcal{A}}_i, & \mathcal{B}_{ij} &= B_{ij} + \frac{1}{Re} \tilde{\mathcal{B}}_{ij}, & \mathcal{C}_{ijk} &= C_{ijk}, \\ \mathcal{D}_i &= D_i, & \mathcal{E}_i &= E_i + \frac{1}{Re} \tilde{\mathcal{E}}_i, & \mathcal{F}_{ij} &= F_{ij} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_i = G_i. \end{aligned}$$

L'optimisation du système POD est donc effectuée en ajoutant une "viscosité tourbillonnaire" $\frac{\alpha_i}{Re}$ au niveau du i -ème mode. On obtient alors le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d a_i(t)}{d t} = & A_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} B_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} C_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ & + D_i \frac{d \gamma}{d t} + \left(E_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} F_{ij} a_j(t) \right) \gamma + G_i \gamma^2 \\ & + \frac{1 + \alpha_i}{Re} \left(\tilde{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \tilde{B}_{ij} a_j(t) + \tilde{E}_i \gamma \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

En passant tous les termes de ce système au membre de gauche, ce système s'écrit formellement :

$$\mathcal{N}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}. \quad (4.23)$$

On cherche alors à déterminer de manière optimale les viscosités tourbillonnaires $\alpha_i, i = 1, \dots, N_{gal}$, éventuellement dépendantes du temps, telles que les erreurs de reconstruction obtenues par intégration du système POD (4.22) soient minimisées.

L'idée est alors d'approcher, au sens des moindres carrés, les coefficients de projection $a_{\tau n}(t)$ (issus de la simulation numérique) par les coefficients de prédiction $a_n(t)$ (calculés par le système dynamique POD ROM).

L'objectif est alors de minimiser la fonction suivante⁸ :

$$\mathcal{J}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\ell}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{gal}} (a_i - a_{\tau i})^2 dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{gal}} \alpha_i^2 dt. \quad (4.24)$$

Les cibles ('target') a_{τ} représentent les coefficients de projection temporels.

Le second terme de la fonctionnelle objectif (4.24) n'est ni physiquement ni économiquement important. Cependant, il est conservé afin de s'affranchir de tout problème de régularisation numérique et d'obtenir un problème d'optimisation bien posé.

La méthode d'amélioration du système POD proposée se ramène donc à un problème d'optimisation avec contraintes. On veut minimiser la fonctionnelle objectif (4.24) sous la contrainte du système POD (dit système d'état) (4.22) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_{gal}}} \mathcal{J}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \text{s.t.} \\ \mathcal{N}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

L'introduction de multiplicateurs de Lagrange ξ_i pour $i = 1, \dots, N_{gal}$ permet de transformer le problème d'optimisation avec contraintes (4.25) en un problème d'optimisation sans contrainte, qui peut être résolu efficacement à l'aide de méthodes adjointes décrites à la section 2.4. Pour cela, une nouvelle fonctionnelle objectif \mathcal{L} , dite fonctionnelle de Lagrange, est introduite :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{J}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) - \left\langle \sum_{i=1}^{N_{gal}} \xi_i, \mathcal{N}_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) \right\rangle \\ &= \mathcal{J}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) - \sum_{i=1}^{N_{gal}} \int_0^T \xi_i(t) \mathcal{N}_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) dt. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Le problème consiste maintenant à rendre la fonctionnelle de Lagrange (4.26) stationnaire. On cherche donc $\delta \mathcal{L} = 0$, soit :

8. Les coefficients de projection sont interpolés aux pas de la résolution du système POD à l'aide de fonctions splines.

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_i} \delta a_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \xi_i} \delta \xi_i = 0.$$

Les variables a , α et ξ étant supposées indépendantes, on a alors :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_i} \delta a_i = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \xi_i} \delta \xi_i = 0.$$

L'annulation de la dérivée de Fréchet par rapport aux variables adjointes donne l'équation d'état $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$.

Les équations adjointes sont obtenues en annulant la dérivée de Fréchet par rapport aux variables d'état a_n . Le système d'équations différentielles ordinaires suivant est alors obtenu :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i(t)}{dt} = & - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \xi_j B_{ji} - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \xi_j (C_{jik} + C_{jki}) a_k \\ & - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \xi_j F_{ji} \gamma - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \frac{1 + \alpha_j}{Re} \xi_j \tilde{\mathcal{B}}_{ji} - \ell(a_i - a_{\tau i}). \end{aligned} \quad (4.27a)$$

Ce système est muni de la condition terminale

$$\xi_i(T) = 0, \quad \forall i. \quad (4.27b)$$

La condition d'optimalité du premier ordre est obtenue en annulant la dérivée de Fréchet par rapport aux paramètres de contrôle α_i .

Quand $\alpha_i = Cste_i$ (indépendant du temps), la condition d'optimalité s'écrit :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \alpha_i} = \int_0^T \left(\beta \alpha_i + \frac{1}{Re} \left(\tilde{\mathcal{A}}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \tilde{\mathcal{B}}_{ij} a_j + \tilde{\mathcal{E}}_i \gamma \right) \xi_i \right) dt, \quad (4.28)$$

et quand $\alpha_i = f_i(t)$, cette même condition s'écrit :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \alpha_i}(t) = \beta \alpha_i(t) + \frac{1}{Re} \left(\tilde{\mathcal{A}}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \tilde{\mathcal{B}}_{ij} a_j + \tilde{\mathcal{E}}_i \gamma \right) \xi_i. \quad (4.29)$$

La condition d'optimalité, condition nécessaire du premier ordre, conduit à un système d'équations différentielles couplées (constitué du système d'état 4.22, du système adjoint 4.27 et d'une des conditions d'optimalité 4.28 ou 4.29) appelé système optimal. Pour limiter les coûts de calcul, un processus de résolution itératif, décrit par l'algorithme 1, peut être utilisé.

Algorithme 1 (Stabilisation d'un système d'ordre réduit POD)

Initialisation des viscosités tourbillonnaires $\boldsymbol{\alpha}^{(0)} = \mathbf{0}$. $n = 0$.

1. *Résolution des équations d'état (4.22) de 0 à T avec le dernier $\boldsymbol{\alpha}^{(n)}$ déterminé. Obtention de $\mathbf{a}^{(n)}$.*
2. *Résolution des équations adjointes (4.27) de T à 0 avec $\boldsymbol{\alpha}^{(n)}$ et $\mathbf{a}^{(n)}$. Obtention de $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$.*
3. *Calcul de la condition d'optimalité (4.28) ou (4.29) avec $\boldsymbol{\alpha}^{(n)}$, $\mathbf{a}^{(n)}$ et $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$. Obtention de $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$.*
4. *A partir de cette estimation, calcul de nouvelles viscosités :*

(a) *si $\boldsymbol{\alpha}$ est constant*

$$\boldsymbol{\alpha}^{(n+1)} = \boldsymbol{\alpha}^{(n)} + \omega^{(n)} \mathbf{d}^{(n)},$$

(b) *si $\boldsymbol{\alpha}$ dépend du temps*

$$\boldsymbol{\alpha}^{(n+1)}(t) = \boldsymbol{\alpha}^{(n)}(t) + \omega^{(n)} \mathbf{d}^{(n)}(t).$$

\mathbf{d} est une direction de descente déterminée par un algorithme d'optimisation laissé au choix de l'utilisateur, et ω est le pas à effectuer le long de cette direction.

5. Si un test de convergence est vérifié, l'algorithme est arrêté. Dans le cas contraire, incrémentation $n = n + 1$ et retour à l'étape 1.

Dans cette étude, la direction de descente \mathbf{d} et le pas ω , apparaissant à l'étape 4 de l'algorithme 1, sont respectivement déterminés par une méthode de gradient conjugué de type Fletcher-Reeves et par une méthode d'Armijo à rebroussement⁹ (annexe C).

La figure 4.17 représente l'évolution de la fonctionnelle coût au cours¹⁰ du processus itératif de résolution des systèmes optimaux construits respectivement avec les conditions d'optimalité (4.28) pour $\alpha_i = Cste_i$ et (4.29) pour $\alpha_i = f_i(t)$. La méthode utilisant $\alpha_i = f_i(t)$ permet de réduire plus sensiblement la valeur de la fonction objectif. La fonctionnelle passe d'une valeur égale à 1,121 sans viscosités tourbillonnaires à des valeurs respectives de 0,0052 et 0,193 pour $\alpha_i = f_i(t)$ et $\alpha_i = Cste_i$ en fin du processus d'optimisation, soit respectivement après 4000 itérations et 400 itérations. Cependant, le flot décrit en (4.20) n'est plus autonome, et une stabilisation sur une période supérieure à la période utilisée pour construire le système POD ROM n'est pas envisageable, contrairement au cas où $\alpha_i = Cste_i$.

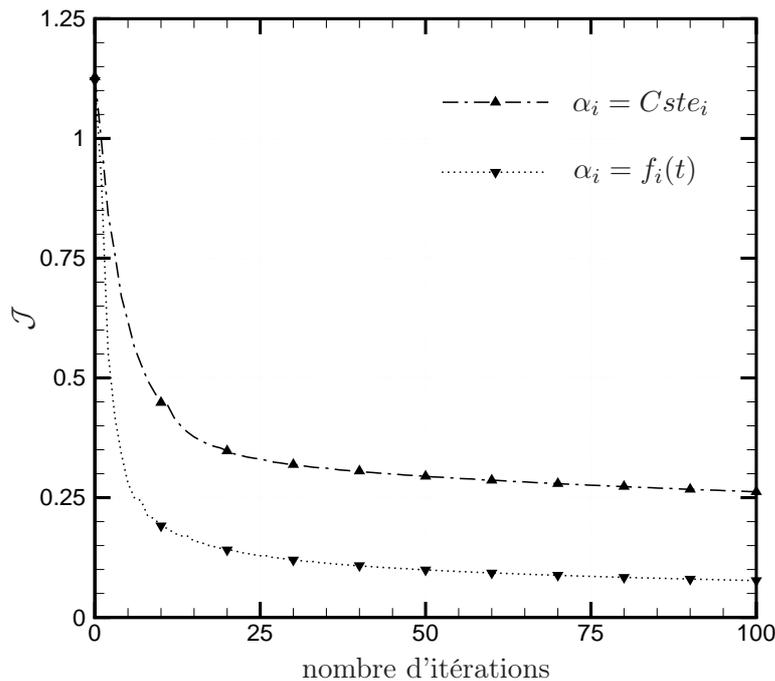


FIGURE 4.17 – Evolution de la fonctionnelle coût au cours du processus d'optimisation.

Les valeurs des viscosités tourbillonnaires optimales pour les $N_{gal} = 14$ modes POD retenus dans le cas $\alpha_i = Cste_i$ sont représentées sur la figure 4.18. La figure 4.19 représente l'évolution temporelle des viscosités tourbillonnaires optimales ajoutées sur les 6 premiers modes POD dans le cas $\alpha_i = f_i(t)$. La résolution du système dynamique POD ROM après introduction de ces viscosités tourbillonnaires, donne un jeu optimal de coefficients de prédiction qui peuvent être comparés aux coefficients de projection.

9. La méthode d'Armijo à rebroussement satisfait généralement la condition de Goldstein (Nocedal et Wright, 1999).

10. Seules les 100 premières itérations sont représentées.

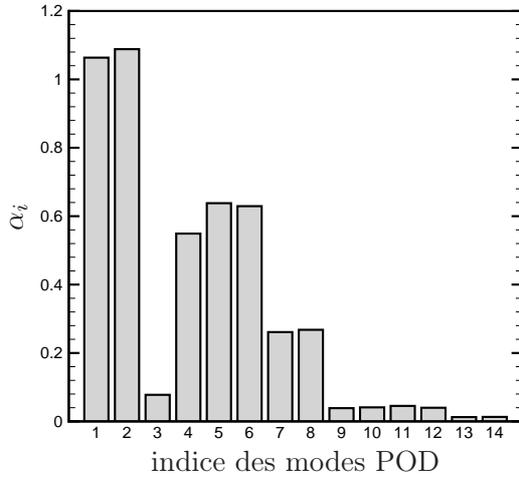


FIGURE 4.18 – Valeurs des viscosités tourbillonnaires à ajouter dans le cas $\alpha_i = Cste_i$.

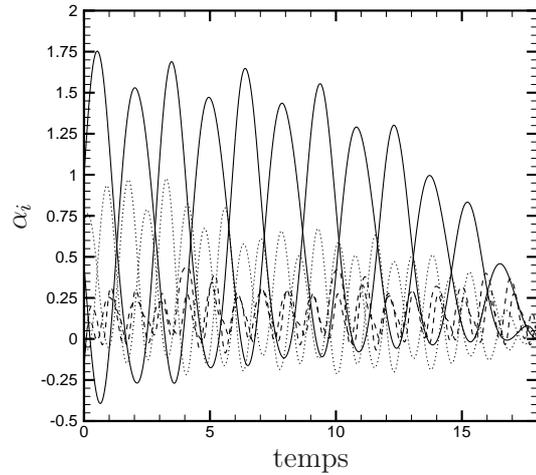


FIGURE 4.19 – Evolution temporelle des viscosités tourbillonnaires optimales ajoutées sur les 6 premiers modes POD pour $\alpha_i = f_i(t)$. traits pleins : modes 1 et 2; traits discontinus : modes 2 et 3; pointillés : modes 5 et 6.

Les figures 4.20 et 4.21 représentent une comparaison entre l'évolution temporelle des 6 premiers coefficients de projection $a_{\tau n}(t)$, et celle des 6 premiers coefficients $a_n(t)$ obtenus par intégration du système POD ROM après introduction de viscosités tourbillonnaires $\alpha_i = Cste_i$ d'une part et $\alpha_i = f_i(t)$ d'autre part. En comparaison au cas non stabilisé $\alpha_i = 0$, une grande amélioration est apportée quand des viscosités $\alpha_i = Cste_i$ sont ajoutées. Les modes stabilisés, avec $\alpha_i = f_i(t)$, sont, quant à eux, quasiment confondus avec les modes projetés.

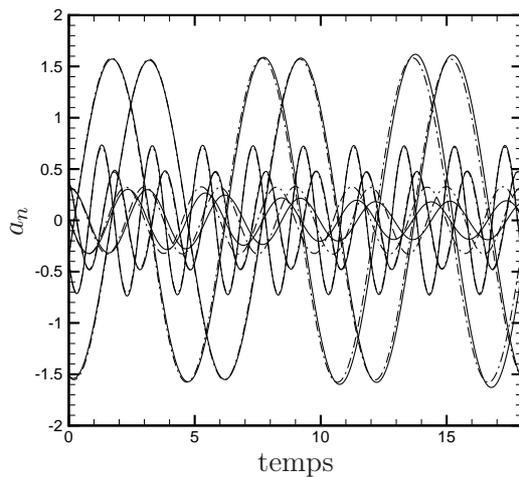


FIGURE 4.20 – Evolution temporelle des 6 premiers modes propres projetés (traits pleins) et prédits avec $\alpha_i = Cste_i$ (discontinus).

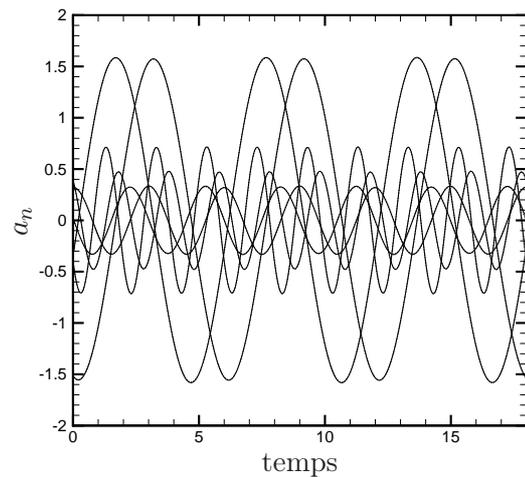


FIGURE 4.21 – Evolution temporelle des 6 premiers modes propres projetés (traits plein) et prédits avec $\alpha_i = f_i(t)$ (pointillés).

La figure 4.22 représente une comparaison du contenu énergétique relatif de chaque mode POD. Ce contenu peut être évalué soit avec les coefficients de projection $a_{proj}(t) = a_{\tau n}(t)$, soit avec les coefficients $a_{pred}(t) =$

$a_n(t)$ prédits par intégration du système POD ROM. Après introduction de viscosités tourbillonnaires, les deux contenus énergétiques (projection et prédiction) sont pratiquement identiques.

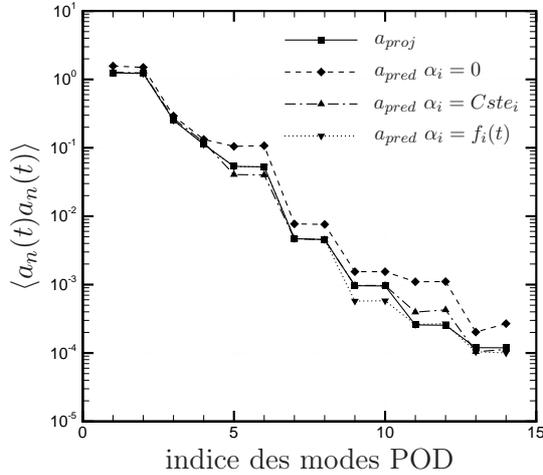


FIGURE 4.22 – Contenu énergétique de chaque mode POD. Estimation avec ajout et sans ajout ($\alpha_i = 0$) de viscosités tourbillonnaires.

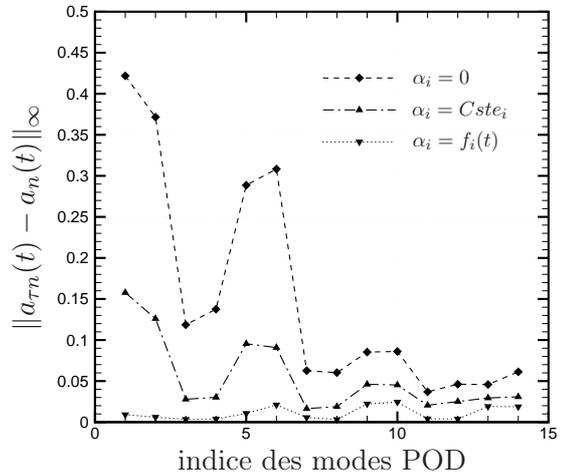


FIGURE 4.23 – Erreur en norme infinie du contenu énergétique de chaque mode POD. Estimation avec et sans ajout de viscosités tourbillonnaires.

L'erreur, en norme infinie, commise sur les contenus énergétiques obtenus par intégration du système POD ROM (avec et sans ajout de viscosités tourbillonnaires) est comparée sur la figure 4.23 à celle correspondant aux modes projetés. L'ajout de viscosités tourbillonnaires réduit considérablement l'erreur commise.

Le principal objectif d'un modèle d'ordre faible est d'approximer le plus fidèlement possible la solution d'un modèle détaillé, tout en conservant des coûts de calcul réduits. Nous avons vu précédemment que les coûts de calcul nécessaires à la résolution du système réduit sont très faibles (moins de une seconde est nécessaire pour résoudre le système POD ROM sur une unité de temps avec une précision de l'ordre de 10^{-7}). Il est alors maintenant nécessaire de vérifier si les coefficients de prédiction, obtenus par résolution du système POD ROM, sont efficaces pour reconstruire les champs de vitesse, solutions des équations de Navier-Stokes. L'erreur¹¹ de reconstruction suivante est de ce fait introduite :

$$\tilde{E}(t, \alpha) = \left(\int_{\Omega} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t, \alpha))^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.30)$$

Dans cette erreur, les champs de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t, \alpha)$ sont respectivement obtenus par résolution du modèle Navier-Stokes et par reconstruction en utilisant les coefficients¹² de prédiction du système POD ROM. La figure 4.24 représente l'évolution temporelle de l'erreur (4.30) pour les différentes viscosités tourbillonnaires α_i possibles. L'erreur de reconstruction, pour le système POD ROM avec $\alpha_i = 0$, s'amplifie au cours du temps. Cette amplification est diminuée de manière importante lorsque des viscosités optimales déterminées pour $\alpha_i = Cste_i$ sont ajoutées. Elle est même pratiquement éliminée lorsque l'on considère des viscosités déterminées pour $\alpha_i = f_i(t)$.

Les figures 4.25, 4.26 et 4.27 représentent respectivement pour $\alpha_i = 0$, $\alpha_i = Cste_i$ et $\alpha_i = f_i(t)$, les portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels a_n , obtenus d'une part par DNS et d'autre part par POD ROM. Sur ces figures, les coefficients a_i pour $i = 1$ à 6 sont tracés en fonction du coefficient a_1 . Les cycles limites qui correspondent au cas DNS ne sont pas retrouvés par intégration du système POD ROM sans stabilisation ($\alpha_i = 0$). En effet, une amplification des coefficients (observée précédemment) se produit,

11. L'erreur en norme \mathcal{L}_2 est choisie en raison de ses propriétés énergétiques.

12. Ces coefficients dépendent naturellement du mode de calcul des viscosités tourbillonnaires.

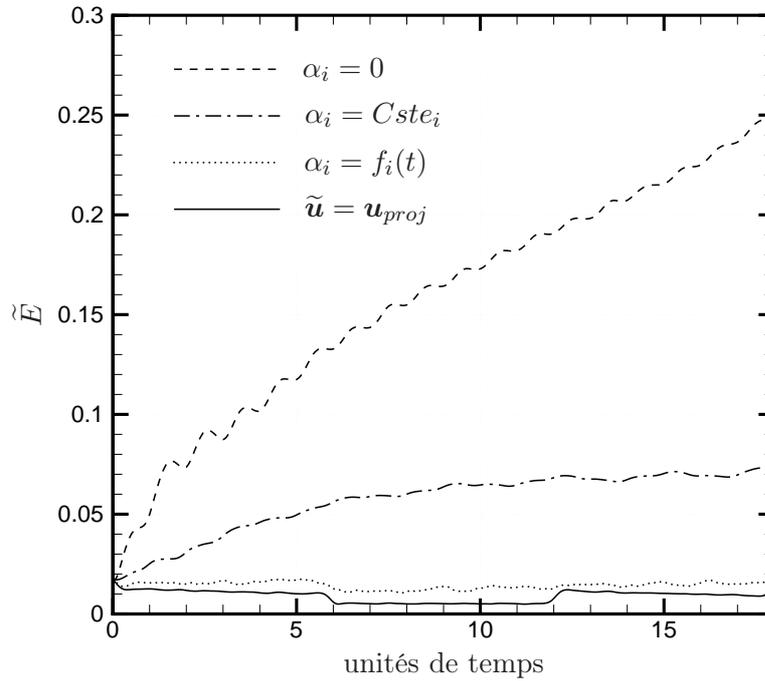


FIGURE 4.24 – Evolution temporelle de l'erreur commise sur la reconstruction des champs de vitesse par POD ROM pour différentes viscosités α_i en comparaison de ceux déterminés par le modèle de Navier-Stokes.

et modifie l'orbite. Pour les cas optimaux obtenus avec $\alpha_i = Cste_i$ et $\alpha_i = f_i(t)$, les cycles limites DNS sont parfaitement retrouvés par POD ROM.

La figure 4.28 présente les portraits de phase des 6 premiers coefficients a_n "anti-symétriques", obtenus dans les cas $\alpha_i = 0$, $\alpha_i = Cste_i$ et $\alpha_i = f_i(t)$, ainsi que ceux obtenus par DNS. L'ajout de viscosités tourbillonnaires optimales dans le modèle POD ROM permet de retrouver de manière assez précise la dynamique obtenue par résolution des équations de Navier-Stokes. L'ajout de viscosités dépendantes du temps ne permet malheureusement pas de reconstruire l'écoulement au delà de la période sur laquelle sont extraites les réalisations de l'écoulement. La résolution du système POD ROM sur des périodes bien plus longues que cette dernière est possible si l'on considère uniquement des viscosités constantes.

4.4.3 Conclusions

Une méthode de stabilisation d'un modèle réduit de dynamique basé sur la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres a été présentée. Cette méthode consiste à introduire de manière optimale des viscosités tourbillonnaires sur chaque mode du système POD. Ces viscosités, qui peuvent éventuellement dépendre du temps, permettent de modéliser les interactions des modes calculés par POD ROM avec les échelles non-résolues, échelles pour lesquelles s'effectue l'essentiel de la dissipation visqueuse. La propriété d'optimalité de cette méthode traduit le fait qu'il n'est pas envisageable de trouver des viscosités plus performantes pour stabiliser le système POD de cette manière. Il faut cependant noter que ces corrections dépendent de la configuration d'étude et ne sont pas "universelles". En d'autres termes, les fermetures devront être évaluées pour chaque configuration d'étude (géométrie, nombre de Reynolds, paramètre de contrôle, ...).

Nous venons d'illustrer la capacité des modèles réduits basés sur la POD à restituer la dynamique ponctuelle d'un écoulement donné (à un nombre de Reynolds fixé), et ce, même en cas d'application du contrôle.

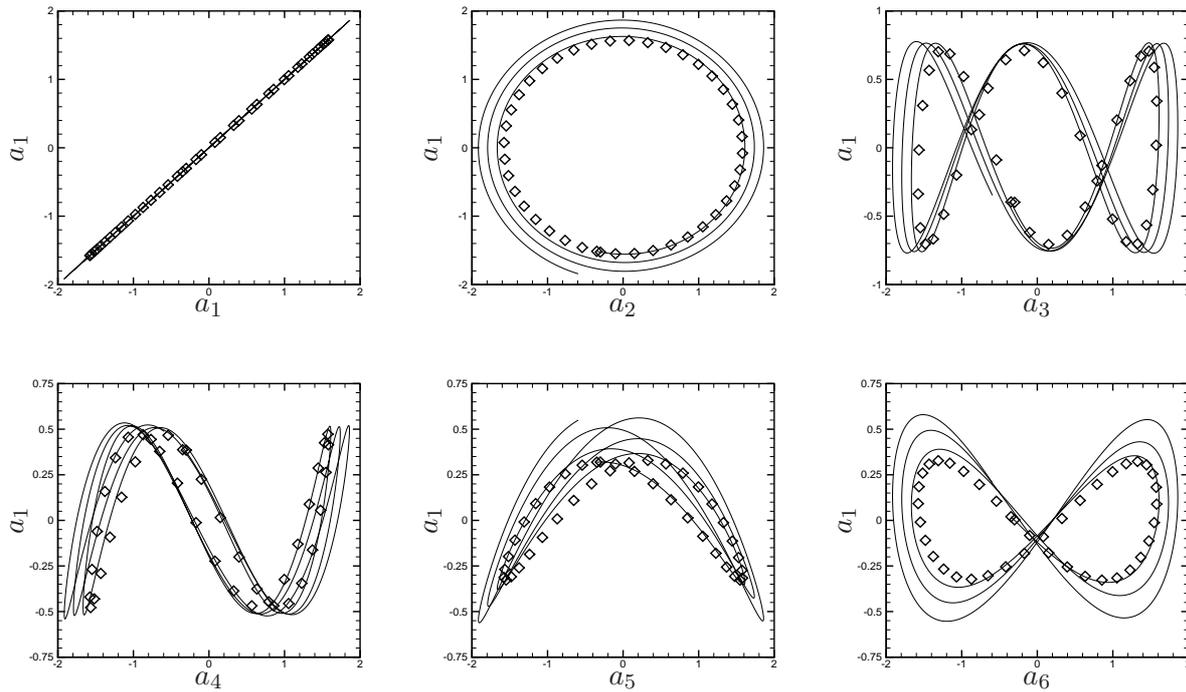


FIGURE 4.25 – Portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels a_n sur 18 unités de temps pour $\alpha_i = 0$. \diamond modes DNS; — modes POD. Cylindre stationnaire.

L'objectif de la section suivante est de montrer que les systèmes d'ordre réduit basés sur la POD sont également capables de prédire des changements de dynamiques (bifurcations avec l'évolution du nombre de Reynolds).

4.5 Etude des bifurcations bidimensionnelles par POD ROM

L'étude de la stabilité des solutions d'équilibre (*resp.* solutions périodiques) d'un système dynamique constitué par des équations différentielles ordinaires (EDO) s'effectue mathématiquement par le calcul des valeurs propres du Jacobien (*resp.* de la matrice de Floquet) de ces EDO. Après discrétisation de ces équations, les dimensions du Jacobien et de la matrice de Floquet peuvent être très grandes. Par exemple, lorsque ces EDO correspondent aux équations de Navier-Stokes, le calcul des valeurs propres devient difficile, voire impossible. Il convient alors de réduire l'ordre de ces EDO en extrayant les caractères dominants. Physiquement, les solutions sont stables lorsqu'elles correspondent à un minimum d'énergie potentielle. En raison de l'optimalité énergétique de la base POD, la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres semble donc être une technique bien appropriée pour réduire l'ordre d'un système dynamique en vue d'étudier sa stabilité.

On se propose ici d'étudier la stabilité du système réduit construit par POD correspondant à l'écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre circulaire. On montrera (§ 4.5.3) que le système POD ROM capture très bien la première bifurcation dite de Hopf (passage d'un état stationnaire à un état périodique). La seconde bifurcation (perte de stabilité des solutions périodiques), due à des effets 3D, sera également très bien prédite par notre analyse 2D (§ 4.5.4). La précision des résultats et les faibles coûts de calculs font de la POD un outil très intéressant pour étudier la stabilité des solutions d'un système dynamique.

4.5.1 Introduction

Malgré sa simplicité de configuration, l'écoulement autour d'un cylindre circulaire est physiquement très riche et complexe. Cela est dû aux différentes interactions entre couche limite, zone de mélange et sillage. Les mécanismes qui conduisent cet écoulement à la turbulence reste d'ailleurs assez mal connus. Williamson (1996) présente un très bon état de l'art. Pour un nombre de Reynolds $Re \simeq 47$, l'écoulement de base bidimensionnel subit une première bifurcation de Hopf, le menant d'un état stationnaire à un état périodique. Ce régime

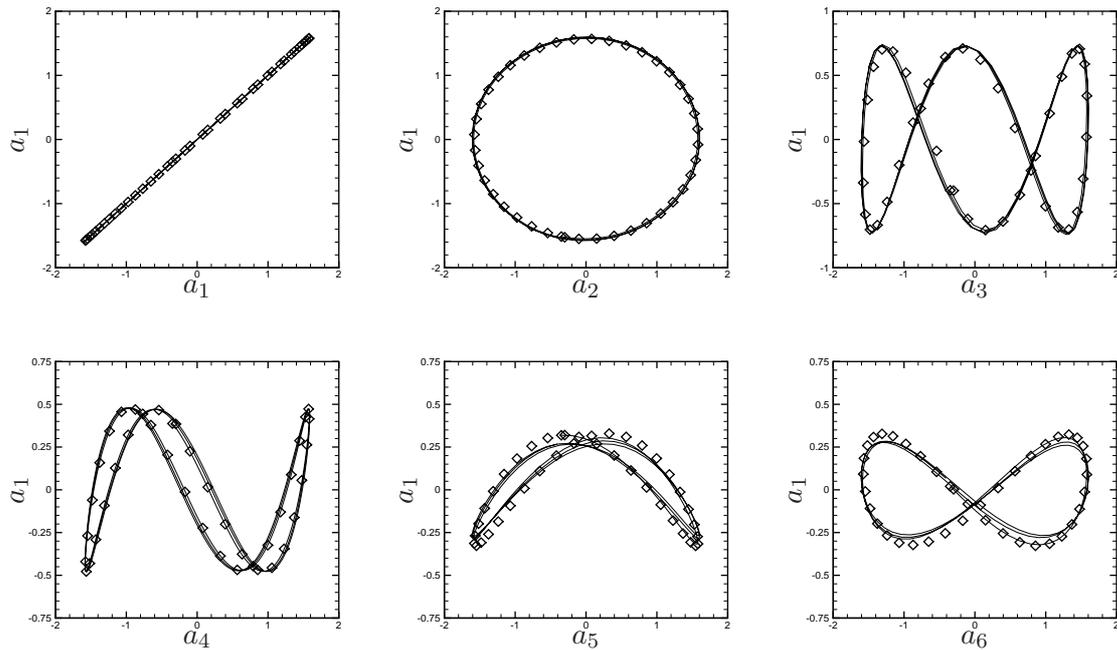


FIGURE 4.26 – Portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels a_n sur 18 unités de temps pour $\alpha_i = Cste_i$. \diamond modes DNS; — modes POD. Cylindre stationnaire.

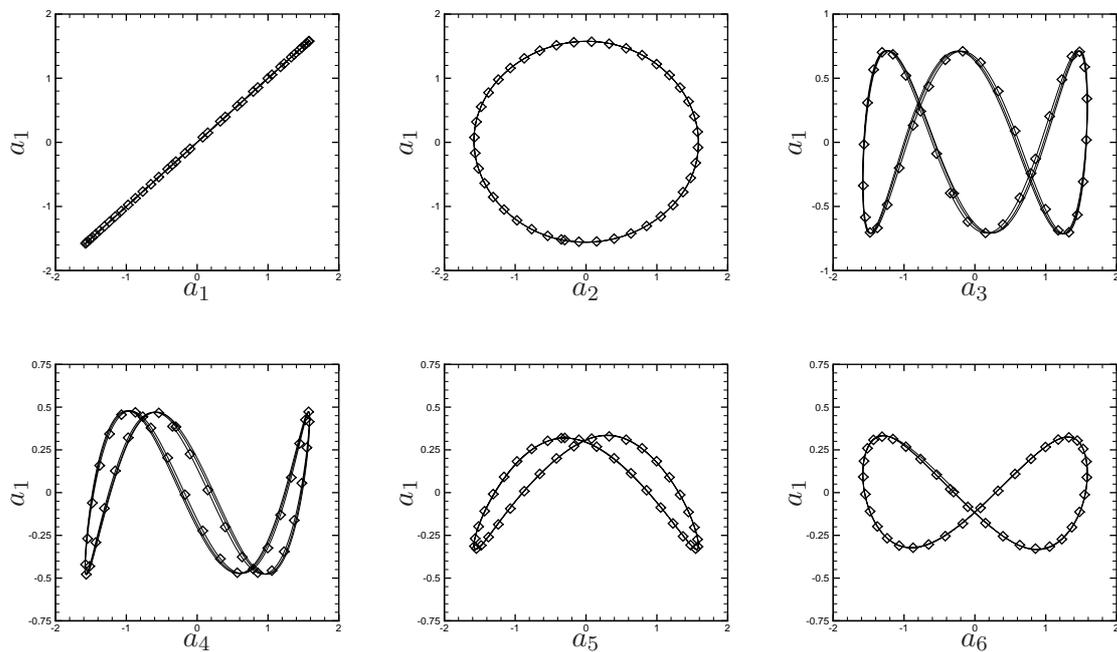


FIGURE 4.27 – Portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels a_n sur 18 unités de temps pour $\alpha_i = f_i(t)$. \diamond modes DNS; — modes POD. Cylindre stationnaire.

périodique bidimensionnel (2D) subsiste jusqu'à une valeur du nombre de Reynolds environ égale à 190 où des effets tridimensionnels (3D), dits mode A, commencent à apparaître (bifurcation de Hopf super-critique longitudinale). Un nouveau mode, dénommé B, apparaît pour des nombres de Reynolds supérieurs à une valeur approximativement égale à 260. Ces différentes étapes sont décrites par Williamson (1996), les valeurs des seuils sont obtenus numériquement par Noack et Eckelmann (1994) à l'aide d'un modèle réduit de type

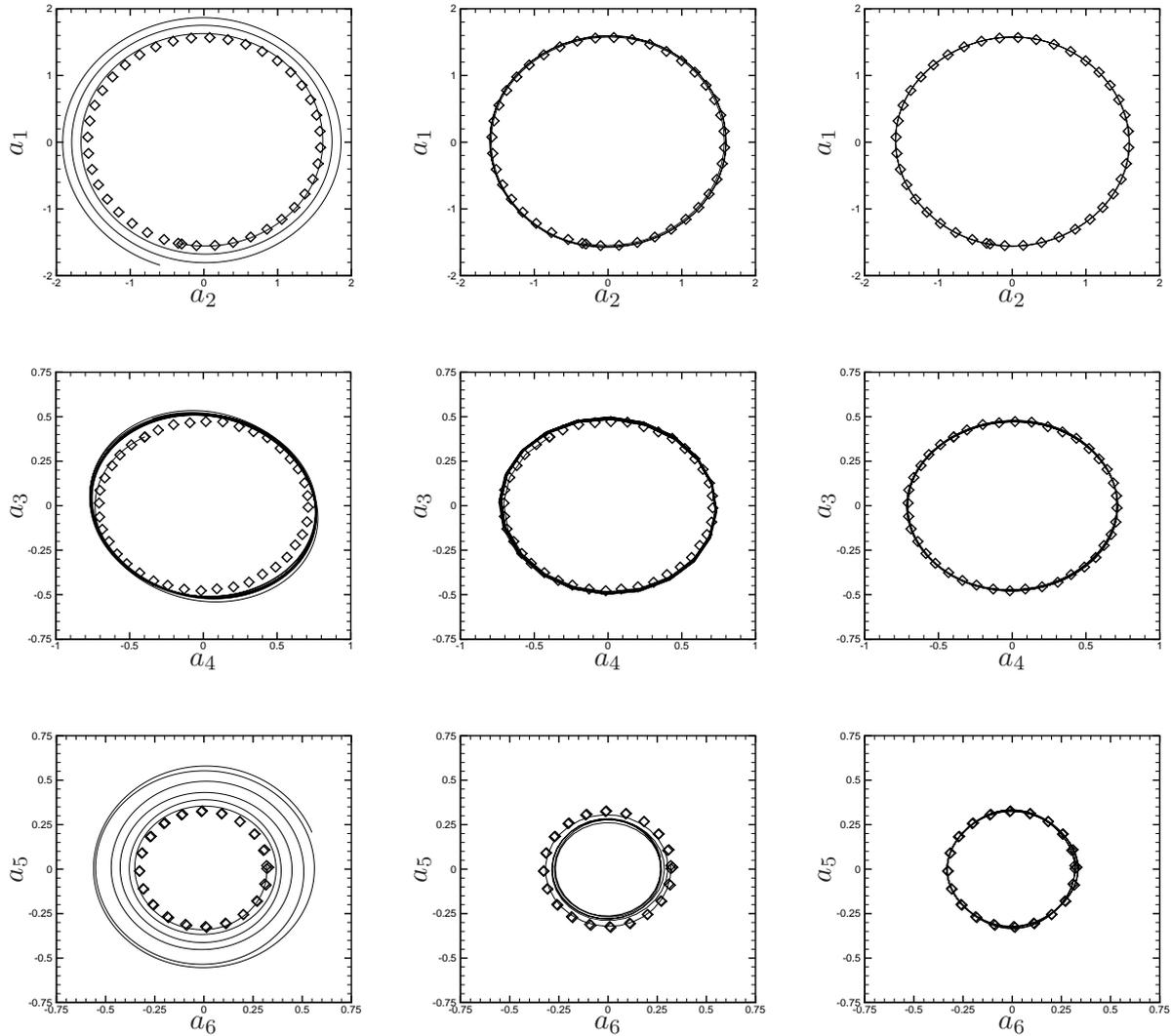


FIGURE 4.28 – Portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels a_n sur 18 unités de temps. \diamond modes DNS; — modes POD. A gauche $\alpha_i = 0$, au centre $\alpha_i = Cste_i$ et à droite $\alpha_i = f_i(t)$. Cylindre stationnaire.

Galerkin. Ces résultats manquent cependant de précision. Barkley et Henderson (1996) proposent des résultats plus précis pour les modes A et B, mais pour des coûts de calcul bien plus importants. Dans cette étude, nous allons réduire l'ordre du modèle de Navier-Stokes bidimensionnel par Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres. On montrera ensuite qu'il est non seulement possible de déterminer le seuil de la première bifurcation de Hopf à l'aide de ce modèle réduit (§ 4.5.3), mais qu'il est également possible de prévoir la seconde bifurcation due à des effets tridimensionnels, par un calcul bidimensionnel (§ 4.5.4).

4.5.2 Etude de stabilité de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire en 2D

Les méthodes mathématiques permettant l'étude de la stabilité linéaire des solutions d'équilibre ou des solutions périodiques pour un flot autonome sont présentées à l'annexe B. Ces études nécessitent toujours le calcul des valeurs propres, soit du Jacobien pour les solutions d'équilibre, soit de la matrice de Floquet pour les solutions périodiques. Or, pour des systèmes de grandes tailles, notamment lorsque les équations de Navier-Stokes sont discrétisées sur des maillages assez fins de l'ordre de millions de points, le calcul des valeurs propres est rendu très difficile, voire impossible. Il convient alors de réduire l'ordre des modèles utilisés à quelques dizaines de degrés de liberté afin de rendre le calcul de ces valeurs propres plus abordable. Dans

cette étude, le système POD ROM déterminé à la section 4.3.1 va être utilisé pour représenter la dynamique de l'écoulement autour du cylindre non contrôlé.

Le flot (B.1) s'écrit alors :

$$\frac{d a_i(t)}{d t} = \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \quad (4.31a)$$

muni de la condition initiale

$$a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \Phi_i(\mathbf{x})). \quad (4.31b)$$

Les coefficients \mathcal{A} et \mathcal{B} intervenant dans le système (4.31) sont les seuls qui dépendent du nombre de Reynolds Re (voir section 4.3.1).

Le flot (4.31a) peut alors s'écrire formellement :

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = \mathcal{N}(\mathbf{a}, Re). \quad (4.32)$$

4.5.3 Etude de la première bifurcation

Barkley et Henderson (1996) ont montré que l'écoulement autour d'un cylindre circulaire est stationnaire et stable pour $Re < 47$. L'objectif de cette section est d'essayer de retrouver ce résultat avec des coûts de calcul particulièrement faibles en utilisant le système POD ROM.

Le Jacobien du système (4.31a) peut s'écrire formellement :

$$J_{ij}(\mathbf{a}, Re) = \mathcal{B}_{ij} + \sum_{k=1}^{N_{gal}} (\mathcal{C}_{ijk} + \mathcal{C}_{ikj}) a_k. \quad (4.33)$$

Le système (4.31a) peut alors être linéarisé autour d'un point d'équilibre \mathbf{a}^* :

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = J(\mathbf{a}^*, Re) \mathbf{a}. \quad (4.34)$$

La condition de stabilité du point d'équilibre est donnée mathématiquement par le signe de la partie réelle des valeurs propres de l'opérateur J défini par la relation (4.33) et évalué au point fixe \mathbf{a}^* (§ B.1). Les valeurs propres du Jacobien J dépendent du nombre de Reynolds qui joue ici le rôle de paramètre de contrôle du système dynamique.

Lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées traversent l'axe imaginaire, *i.e.* quand leur partie réelle devient positive, il se produit une bifurcation de Hopf (Bergé *et al.*, 1988) donnant naissance à un phénomène périodique.

Les valeurs propres du Jacobien (4.33) s'écrivent formellement $\lambda_j = 2\pi(\sigma_{rj} + iS_{tj})$, où σ_r est le facteur d'amplification de la perturbation et S_t le nombre de Strouhal associé à l'apparition d'une solution périodique.

On se propose de déterminer les valeurs propres du Jacobien (4.33) pour trois valeurs du nombre de Reynolds, à savoir 40, 45 et 47. Dans cette étude, 40 modes POD¹³ sont conservés dans le système (4.31).

La figure 4.29 représente, dans le plan complexe engendré par le taux d'amplification de la perturbation et par le nombre de Strouhal, les valeurs propres du Jacobien pour des nombres de Reynolds égaux à 40, 45, et 47. La plus grande partie réelle des valeurs propres complexes conjuguées augmente avec le nombre de Reynolds. Des valeurs propres complexes conjuguées coupent l'axe imaginaire (manifestation d'une bifurcation de Hopf) pour un nombre de Reynolds critique, Re_{c1} . Cette bifurcation donne naissance à un phénomène périodique auquel est associé un nombre de Strouhal critique, St_{c1} . Le nombre de Reynolds critique est déterminé par une interpolation polynomiale entre le nombre de Reynolds et la plus grande partie réelle des valeurs propres du Jacobien obtenue dans les trois cas étudiés : cette interpolation est représentée sur la figure 4.30. Le nombre de Reynolds critique est obtenu lorsque la valeur propre devient imaginaire pure. Le seuil déterminé est égal à $Re_{c1} = 46,2$.

13. Il n'est sans doute pas nécessaire de conserver autant de modes dans le système POD, surtout lorsque l'écoulement est stationnaire. Cependant, en raison des très faibles coûts de calculs associés à la détermination des valeurs propres d'une matrice de petite taille, 40 modes sont conservés afin d'obtenir des résultats assez précis.

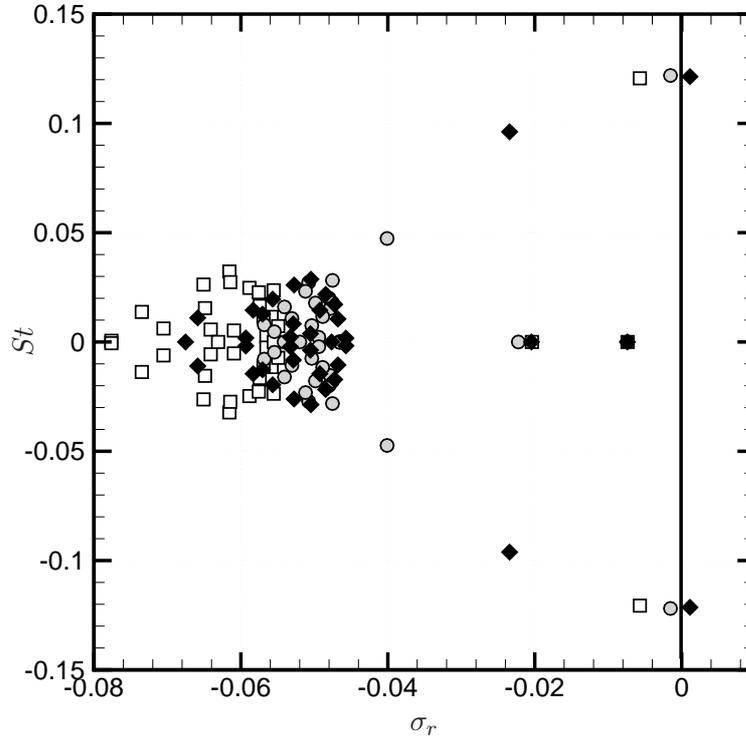


FIGURE 4.29 – Lieu géométrique des valeurs propres du Jacobien du système POD pour $Re = 40$ (carrés blancs), $Re = 45$ (ronds gris) et $Re = 47$ (losanges noirs).

Le nombre de Strouhal associé à l'apparition du phénomène périodique est déterminé de manière identique (figure 4.31). Une interpolation polynômiale est réalisée entre les parties imaginaires et les parties réelles des valeurs propres de plus grandes parties réelles pour les trois nombres de Reynolds étudiés. Le nombre de Strouhal critique est obtenu lorsque la valeur propre devient imaginaire pure. Ce nombre est égal à $St = 0,1217$.

La table 4.2, tirée de Mittal et Kumar (2003), présente les paramètres critiques (nombre de Reynolds et nombre de Strouhal), obtenus par expériences et par différentes méthodes de simulations numériques pour la première bifurcation de Hopf. Le nombre de Reynolds critique, ainsi que le nombre de Strouhal associé, sont en très bon accord avec les résultats de la littérature. Enfin, ces résultats auraient peut-être encore pu être légèrement améliorés, si on avait construit la base POD en mélangeant des réalisations provenant d'avant et après la bifurcation de Hopf comme cela a été proposé par Ma et Karniadakis (2002). Une autre méthode encore, équivalente sur le principe mais pas sur la mise en œuvre, aurait été de faire comme à la section 6.4.3 et de construire une base POD en ajoutant des modes de non-équilibre (Noack *et al.*, 2003).

4.5.4 Etude de la seconde bifurcation

La stabilité des solutions périodiques est mathématiquement déterminée à l'aide du module des valeurs propres de la matrice de Floquet (ou matrice de Monodromie). La méthode de calcul de la matrice de Floquet est celle du théorème 8 énoncée dans l'annexe B.

On cherche les valeurs propres de la matrice $\mathcal{M}(Re) = \Phi(T(Re), Re)$ solution du problème :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = J(\mathbf{a}^*, Re)\Phi, \quad (4.35)$$

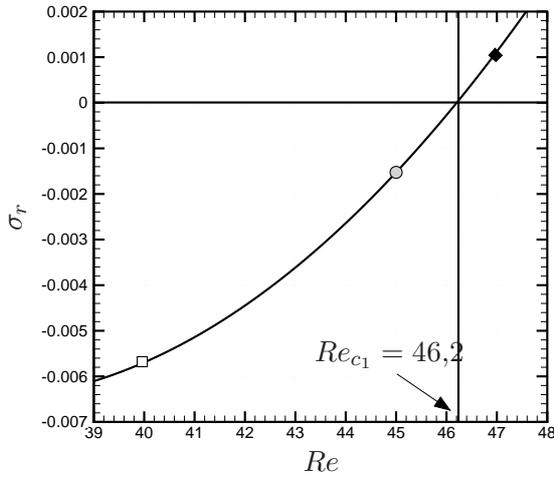


FIGURE 4.30 – Evolution de la valeur propre du Jacobien de plus grande partie réelle en fonction du nombre de Reynolds et détermination du nombre de Reynolds critique.

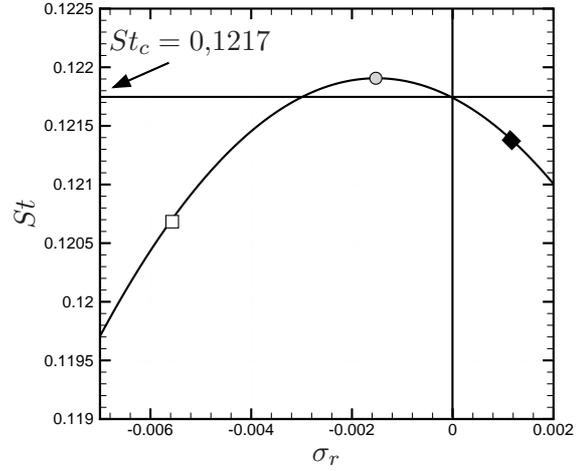


FIGURE 4.31 – Evolution du nombre de Strouhal en fonction du taux d'amplification de la perturbation pour $Re = 40$, $Re = 45$ et $Re = 47$ et détermination du nombre de Strouhal de la solution périodique.

Auteurs	Re_c	St_c	Méthode	Maillage
Berger et Wille (1972)	50,00	0,12	Expériences	
Gresho <i>et al.</i> (1984)	50,00	0,14	FEM, 2D	1 825
Jackson (1987)	45,403	0,1363	FEM, itérations méthode inverse	3 056
Zebib (1987)	39-43	0,11-0,13	Méthode aux valeurs propres	
Williamson (1989)	47,90	0,122	Expériences	
Morzyński et Thiele (1991)	46,27	0,1345	FDM	3 200
Norgberg (1994)	$47,4 \pm 5$	0,1177	FEM, itérations sous espace	15 838
Noack et Eckelmann (1994)	54	0,149	FEM, méthode Galerkin	10 000
Morzyński <i>et al.</i> (1999)	47,00	0,132	Expériences	
Ding et Kawahara (1999)	46,39	0,1262	FEM, méthode d'Arnoldi	9 870
Mittal et Kumar (2003)	48,2	0,122	FEM, itérations sous espace	5 224
	47,5	0,1189	FEM, itérations sous espace	14 805
	47,4	0,1169	FEM, itérations sous espace	24 840
Présente étude	46,20	0,1217	FEM, 2D & POD (40 modes)	12 000

TABLE 4.2 – Paramètres critiques associés à la première bifurcation de Hopf pour l'écoulement autour d'un cylindre stationnaire.

muni de la condition initiale $\Phi(0) = \mathbb{I}_{N_{gat}}$.

La période T pour laquelle est calculée la matrice de Floquet dépend du nombre de Reynolds (Williamson, 1996).

En raison de la bonne représentativité du système dynamique (4.31) pour des écoulements périodiques, seulement 20 modes POD sont retenus.

La figure 4.32 représente, dans le plan complexe, les valeurs propres de la matrice de Floquet pour des nombres de Reynolds égaux à 100, 150 et 180. On observe à chaque fois une stabilité marginale due à la présence d'une valeur propre égale à 1. Cette dernière signifie qu'une perturbation le long de la trajectoire reste invariante. Le module de la valeur propre de plus grand module (exceptée celle égale à 1) augmente avec le nombre de Reynolds. Le nombre de Reynolds critique est obtenu par extrapolation polynômiale du module de ces valeurs propres en fonction du nombre de Reynolds (figure 4.34). Le nombre de Reynolds critique

Re_{c2} est environ égal à 189, soit un excellent accord avec les études antérieures. Il est cependant important de rappeler que ces résultats sont uniquement issus d'une extrapolation. Le régime périodique est en réalité marginalement stable vis à vis de perturbations bidimensionnelles. En effet, le module de la valeur propre de plus grand module augmente et atteint une valeur égale à 1, puis décroît après ce seuil. La perturbation est toujours amortie, sauf pour un nombre de Reynolds égal à 189 où elle subsiste. Il est alors légitime de penser qu'une perturbation tridimensionnelle à ce seuil pourrait alors déstabiliser l'écoulement.

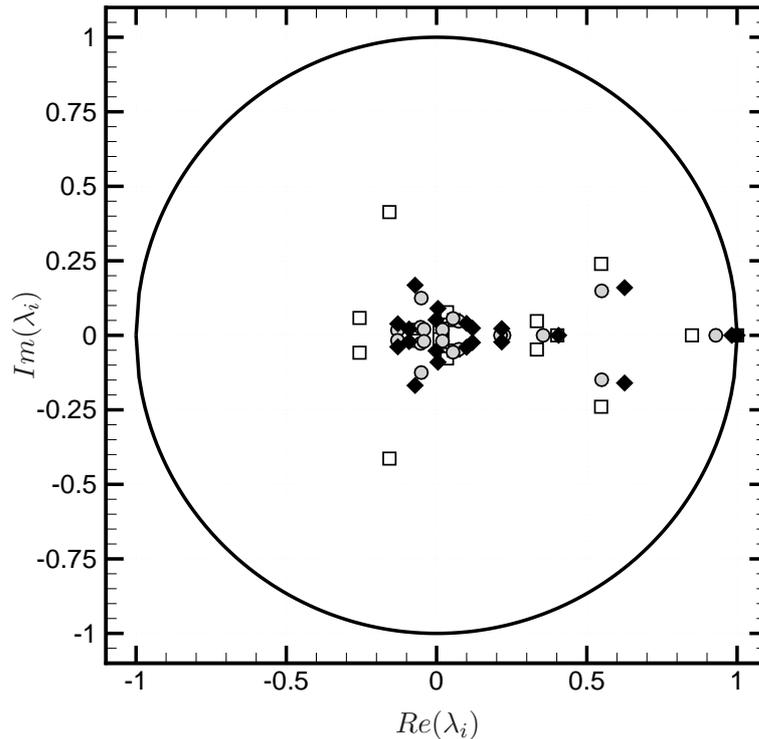


FIGURE 4.32 – Lieu géométrique des valeurs propres de la matrice de Floquet du système POD pour $Re = 100$ (carrés blancs), $Re = 150$ (ronds gris) et $Re = 180$ (losanges noirs).

Dans la littérature, il existe une large gamme de nombres de Reynolds critiques déterminés expérimentalement. Bloor (1964) a déterminé des nombres de Reynolds critiques qui se situent entre 140 et 190. Les nombres de Reynolds critiques obtenus semblent dépendre du degré de turbulence présent lors de ces expériences. En dehors de cette étude, dans laquelle tous les paramètres ne sont pas connus, les résultats sont plus précis. Roshko (1954) et Tritton (1959) trouvent un nombre de Reynolds critique égal à 150, Zang *et al.* (1995) obtiennent $Re_c = 160$, Eisenlohr et Eckelmann (1989) ainsi que Norgberg (1994) trouvent $Re_c = 165$, et Williamson (1989) trouve $Re_c = 178$. Plus récemment, Miller et Williamson (1994) montrent qu'il est possible de repousser ce nombre de Reynolds critique jusqu'à une valeur égale à 194. Ceci est réalisé en imposant des conditions de forçage¹⁴ aux extrémités du cylindre dans la direction longitudinale. Ces conditions permettent aux rouleaux tridimensionnels de l'allée de Von Kármán de rester parallèles jusqu'à ce nombre de Reynolds critique.

Numériquement, Noack et Eckelmann (1994) utilisent une analyse de Floquet tridimensionnelle appliquée à un modèle réduit de Galerkin (*Galerkin Model*, GM) construit avec uniquement 100 modes. Le nombre de Reynolds critique obtenu est égal à 170, et la longueur d'onde longitudinale critique associée est égale à $1,8D$,

14. Des tubes d'aspiration sont utilisés aux extrémités longitudinales du cylindre.

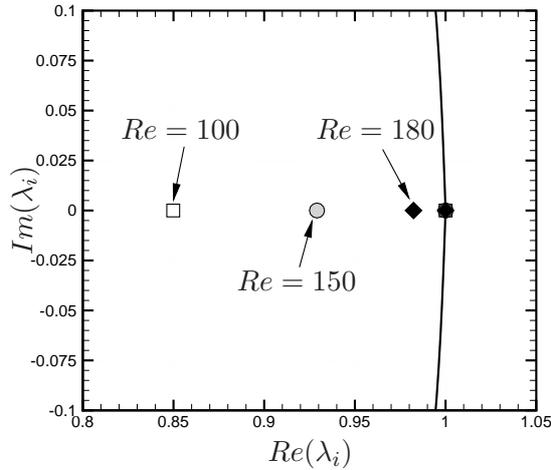


FIGURE 4.33 – Zoom sur le lieu géométrique de la valeur propre de plus grand module de la matrice de Floquet pour le système POD, obtenue pour $Re = 100$, $Re = 150$ et $Re = 180$.

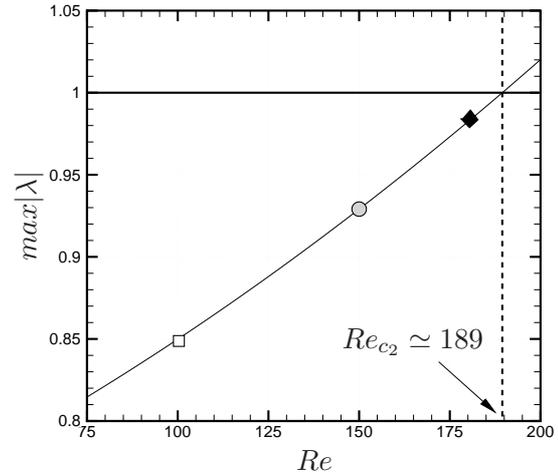


FIGURE 4.34 – Evolution de la valeur propre de la matrice de Floquet de plus grand module en fonction du nombre de Reynolds et détermination du nombre de Reynolds critique.

où D représente le diamètre du cylindre. Une étude plus précise a été réalisée par Barkley et Henderson (1996). Dans leur étude, une analyse de Floquet tridimensionnelle est réalisée en utilisant directement le modèle de Navier-Stokes, discrétisé spatialement sur des maillages qui contiennent en moyenne 10 000 nœuds. Le nombre de Reynolds critique déterminé est $Re_c = 188,5 \pm 1$, et la longueur d'onde critique associée est $3,96D \pm 0,2D$.

Les résultats obtenus dans notre étude ne permettent pas de déterminer la longueur d'onde critique. Néanmoins, le nombre de Reynolds critique est en excellent accord avec les résultats de Barkley et Henderson (1996). Le nombre de Reynolds critique se rapproche également du nombre de Reynolds obtenu expérimentalement par Miller et Williamson (1994) pour un écoulement tridimensionnel "idéal"¹⁵.

La table 4.3, présente les paramètres critiques (nombre de Reynolds et nombre de Strouhal), obtenus par expériences et par différentes méthodes de simulations numériques pour la seconde bifurcation de Hopf.

Auteurs	Re_c	λ_c	Méthode	Maillage
Roshko (1954)	150	-	Expériences	
Tritton (1959)	150	-	Expériences	
Bloor (1964)	140-190	-	Expériences	
Eisenlohr et Eckelmann (1989)	165	-	Expériences	
Williamson (1989)	178	-	Expériences	
Norgberg (1994)	165	-	Expériences	
Noack et Eckelmann (1994)	170	1,8	FEM 3D & GM (100 modes)	100 000
Miller et Williamson (1994)	194	-	Expériences, conditions idéales	
Zang <i>et al.</i> (1995)	160	-	Expériences	
Barkley et Henderson (1996)	188,5	3,96	Méthode spectrale, 3D	~10 000
Présente étude	189	-	FEM 2D & POD (20 modes)	12 000

TABLE 4.3 – Paramètres critiques associés à la seconde bifurcation de Hopf pour l'écoulement autour d'un cylindre stationnaire. λ_c représente la longueur d'onde longitudinale en diamètre.

15. *i.e.* un écoulement tridimensionnel qui se comporte physiquement comme si le cylindre était de longueur infinie, soit une configuration pseudo bidimensionnelle.

4.5.5 Conclusions

Cette étude a permis de montrer l'efficacité de la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres pour déterminer les bifurcations qui peuvent intervenir dans des systèmes dynamiques de grandes tailles. En effet, la première bifurcation de Hopf que subit l'écoulement autour d'un cylindre circulaire est déterminée avec une très grande précision pour un coût de calcul très faible, en comparaison avec des études antérieures. La fréquence associée au régime périodique est aussi en très bon accord avec les résultats de la littérature. La seconde bifurcation tridimensionnelle (bifurcation de Hopf longitudinale) est également très bien prédite par une analyse bidimensionnelle. Pour déterminer la longueur d'onde associée à cette seconde bifurcation, une analyse tridimensionnelle est cependant nécessaire.

