Formule de Poisson motivique

Mémoire de M2 sous la direction d'Antoine Chambert-Loir

Margaret Bilu

3 octobre 2013

Table des matières

1 Théorie classique : la thèse de Tate **4**
1.1 Rappels d'analyse de Fourier 4
1.2 Théorie locale 6
1.2.1 Caractères et dualité 6
1.2.2 Le caractère standard 7
1.2.3 Transformée de Fourier 8
1.3 Théorie globale 10
1.3.1 Généralités sur les produits restreints 10
1.3.2 L'anneau des adèles 14
1.3.3 Formule de Poisson et théorème de Riemann-Roch 17

2 Anneau de Grothendieck des variétés avec exponentielles **19**
2.1 Motivation 19
2.2 Définition 20
2.3 Anneaux de Grothendieck relatifs 21
2.4 Sommes exponentielles 22

3 Formule de Poisson motivique **25**
3.1 Interlude : Rudiments d'intégration p-adique 25
3.2 Transformée de Fourier motivique locale 26
3.2.1 Fonctions de Schwarz-Bruhat motiviques 26
3.2.2 Intégration 28
3.2.3 Transformée de Fourier locale 28
3.3 Transformée de Fourier motivique : cas global 31

4 Annexe : Le théorème de Riemann-Roch pour les courbes **34**
4.1 Diviseurs et systèmes linéaires 35
4.2 La théorème de Riemann-Roch, première forme 35
4.3 Dualité de Serre 36
4.3.1 Classes d'adèles et leur dual 36
4.3.2 Théorème de dualité 36
4.4 Théorème de Riemann-Roch, forme définitive 37

Introduction

Le présent mémoire se place à l'interface de deux sujets ayant connu récemment un fort développement : l'intégration motivique, ainsi que l'utilisation de l'analyse de Fourier, et plus particulièrement de la formule sommatoire de Poisson, pour l'obtention de résultats de nature arithmétique. Son objectif principal est de présenter et démontrer la formule de Poisson motivique due à E. Hrushovski et D. Kazhdan ([6]), dans la version qui en est donnée dans le très récent article [4] d'A. Chambert-Loir et de F. Loeser, où elle a été appliquée pour démontrer la rationalité de certaines fonctions zêta de hauteurs motiviques. Plus précisément, en notant $\mathscr{F}$ la transformation de Fourier par rapport à une mesure bien choisie, il est connu ([9], d'après [10]) pour k fini de cardinal q, que :

Théorème 0.1 *(Formule de Poisson) Soit $F = k(C)$ le corps de fonctions d'une courbe projective lisse connexe C de genre g sur k. Soit φ une fonction de Schwarz-Bruhat sur les adèles $\mathbf{A}_F$. Alors*

$$\sum_{x\in F}\varphi(x) = q^{1-g}\sum_{y\in F}\mathscr{F}\varphi(y).$$

Notre but sera de donner un sens à cela dans le cas où k est un corps algébriquement clos, ce qui sera possible dans le cadre de l'intégration motivique. Notre résultat principal sera donc

Théorème 0.2 *(Formule de Poisson motivique) Soit k un corps algébriquement clos. Soit $F = k(C)$ le corps de fonctions d'une courbe projective lisse connexe C de genre g sur k. Soit φ une fonction de Schwarz-Bruhat sur les adèles $\mathbf{A}_F$. Alors*

$$\sum_{x\in F}\varphi(x) = \mathbf{L}^{1-g}\sum_{y\in F}\mathscr{F}\varphi(y).$$

où $\mathbf{L}$ est un certain symbole que nous allons définir et qui remplacera la cardinal q de k ci-dessus.

L'intégration motivique, introduite par M. Kontsevich en 1995, est une extension, dans un cadre géométrique, de la théorie de l'intégration p-adique. Cette dernière a déjà fait ses preuves pendant les dernières décennies, depuis les travaux d'Igusa sur la rationalité des fonctions zêta qui portent son nom, jusqu'au théorème de Batyrev, qui dit que deux variétés de Calabi-Yau (c'est-à-dire dont le fibré canonique est trivial) birationnellement équivalentes ont mêmes nombres de Betti.

Kontsevich s'est inspiré des idées contenues dans la preuve de ce théorème en remplaçant les corps p-adiques par le corps des séries entières $\mathbf{C}((t))$. En faisant cela, on rencontre une difficulté de taille : $\mathbf{C}((t))$ n'est pas localement compact, et on ne peut y construire de mesure réelle raisonnable. Kontsevich propose alors une mesure « motivique » qui prend ses valeurs dans un anneau $\widehat{\mathcal{M}}$ construit à partir de l'anneau de Grothendieck des variétés. Pour tout corps k, ce dernier est l'anneau KVar_k obtenu en prenant le groupe abélien libre des classes d'isomorphismes de variétés sur un corps k muni du produit donné par le produit fibré des variétés, quotienté par les relations

$$[X] - [Z] - [X - Z]$$

dès que Z est une sous-variété fermée de X. Chaque intégrale construite de cette façon porte alors un grand nombre d'informations géométriques. La première application en était une extension du théorème de Batyrev : deux variétés de Calabi-Yau birationnelles ont en fait mêmes nombres de Hodge.

Le deuxième aspect important de ce mémoire, l'analyse de Fourier, a gagné en importance en théorie des nombres depuis la thèse de Tate [10], dans laquelle une démonstration spectaculaire du prolongement méromorphe et de l'équation fonctionnelle des fonctions L est donnée.

Depuis, la formule de Poisson a également connu des applications dans le domaine des conjectures de Manin, dont l'objectif est de prédire en fonction de certaines grandeurs géométriques le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée d'une variété algébrique projective X sur un corps de nombres K. Si $H : X \longrightarrow \mathbf{R}$ est la hauteur considérée, cela peut se reformuler simplement en termes du domaine de convergence des fonctions zêta associées à H,

$$\zeta_{F,H}(s) = \sum_{x \in F} \frac{1}{H(x)^s}$$

pour tout $F \subset X$. Des preuves ([2], [3], [5]) ont été données pour quelques types de variétés, plusieurs d'entre elles utilisant des formules de Poisson qui, appliquées à la fonction zêta des hauteurs, permettent de la réécrire d'une manière agréable. Vers l'année 2000, Peyre a également proposé de considérer un problème analogue dans le cas des corps de fonctions : au lieu de s'intéresser aux points algébriques d'une variété, on cherche à compter les courbes algébriques d'un degré donné tracées sur la variété. On peut espérer qu'une extension des méthodes précédentes au cadre de l'intégration motivique permette des avancées dans ce sens.

Le présent texte s'articule en trois parties principales. La première est dédiée à la thèse de Tate, où nous démontrerons la formule de Poisson arithmétique. Ensuite, nous introduirons dans une deuxième partie l'anneau de Grothendieck des variétés et exponentielles nécessaire à la construction de l'analyse de Fourier motivique. La troisième et dernière partie sera dédiée à l'analyse de Fourier motivique proprement dite, et se terminera par la démonstration du théorème 0.2. Nous avons également inclus une annexe sur le théorème de Riemann-Roch pour les courbes car ce dernier apparaît comme une sorte de fil conducteur dans les parties arithmétique et géométrique de ce travail.

Remerciements. J'aimerais remercier en premier lieu Antoine Chambert-Loir pour m'avoir proposé ce sujet de mémoire et pour sa disponibilité et ses explications. Ensuite, je voudrais remercier les organisateurs et les enseignants du programme "Motivic invariants and singularities" auquel j'ai pu assister à l'Université de Notre Dame en mai-juin 2013, et où j'ai considérablement agrandi ma compréhension de l'intégration motivique et découvert beaucoup de sujets attenants. Mes remerciements vont également aux nombreux participants de ce programme qui, en me posant des questions sur mon mémoire, m'ont aidé à me rendre compte des points qu'il me restait à éclaircir. Enfin, je remercie Samuel B. et Xavier L. pour m'avoir aidée à préparer ma soutenance.

Notations. Pour tout ensemble A, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A. Pour tout produit $X_1 \times \ldots \times X_n$ de schémas, on note pr_i la i-ème projection (sur X_i). Pour tout corps F, on note $\mathbf{A}^n_F$ l'espace affine sur F (à ne pas confondre avec les adèles $\mathbf{A}_F$ sur F, notés R dans l'annexe afin de rester fidèle aux notations de [11]). Pour tout diviseur D d'une courbe C sur un corps k, on note

$$L(D) = \{0\} \cup \{f \in k(C) | \mathrm{div}(f) \geq -D\}$$

où $\mathrm{div}(f) = \sum_{P \in C} \mathrm{ord}_P(f)[P]$ est le diviseur des pôles et des zéros de f.

1 Théorie classique : la thèse de Tate

Avant Tate, l'équation fonctionnelle pour les séries L avait été montrée par Hecke autour de l'année 1920 utilisant certaines formules assez techniques sur les fonctions theta. En remplaçant ces dernières par de l'analyse de Fourier sur les idèles et adèles introduits respectivement par Chevalley (1940) et Artin et Whaples (1945), Tate parvient dans sa thèse à une démonstration beaucoup plus conceptuelle mettant véritablement en évidence la nature de l'équation fonctionnelle comme conséquence de la formule sommatoire de Poisson. Il remarque que la fonction

$$L(s, \chi) = \sum_{I \in I_F \setminus \{(0)\}} \frac{\chi(I)}{N(I)^s}$$

d'un corps de nombres F (avec χ un caractère multiplicatif sur l'ensemble I_F des idéaux de F) provient d'une intégrale de la forme

$$\zeta(f, c) = \int_{\mathbf{A}_F^*} f(x)c(x)dx$$

sur les idèles $\mathbf{A}_F^*$ de F pour f une fonction sur $\mathbf{A}_F$ et $c : \mathbf{A}_F^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$ un quasi-caractère convenables. En utilisant la formule de Poisson entre f et sa transformée de Fourier $\mathscr{F}f$, il prolonge ζ à tous les quasi-caractères, détecte les pôles et prouve l'équation

$$\zeta(f, c) = \zeta(\mathscr{F}f, \tilde{c})$$

où $\tilde{c}(x) = |x|c(x)^{-1}$ avec $|\cdot|$ la norme sur les idèles. En transposant le tout de nouveau à $L(s, \chi)$, il en tire son prolongement méromorphe et son équation fonctionnelle, avec une interprétation satisfaisante des facteurs multiplicatifs qui y interviennent en termes de facteurs locaux provenant des places archimédiennes et des idéaux premiers divisant le conducteur de χ.

L'objectif de cette section est de démontrer la formule de Poisson telle qu'elle apparaît dans la thèse de Tate, et de mettre en évidence sa nature géométrique en explicitant son lien avec le théorème de Riemann-Roch. Pour cela, nous allons commencer par développer la théorie de Fourier nécessaire sur les corps locaux. Après un paragraphe général sur les produits restreints que nous appliquerons à l'anneau des adèles, nous expliquerons comment passer de la théorie locale à la théorie de Fourier globale sur les adèles. Nous terminerons par une démonstration de la formule de Poisson et du théorème de Riemann-Roch arithmétique, dont nous dériverons le théorème de Riemann-Roch géométrique.

1.1 Rappels d'analyse de Fourier

Soit G un groupe topologique. Un quasi-caractère sur G est un morphisme de groupes topologiques $\chi : G \longrightarrow \mathbf{C}^*$ et un caractère sur G est un morphisme de groupes topologiques $\chi : G \longrightarrow \mathcal{S}^1$ où S^1 est le groupe des complexes de module 1. On appelle caractère trivial le caractère identiquement égal à 1.

Une mesure de Haar sur G est une mesure de Radon (c'est-à-dire une mesure borélienne sur G, finie et intérieurement régulière sur les compacts de G, ainsi que extérieurement régulière sur les boréliens de G) invariante par translation à gauche et à droite. Dans le cas où G est compact, il est toujours muni d'une mesure de Haar μ, et les caractères de G sont orthogonaux pour le produit scalaire $\chi.\chi' = \int_G \chi(g)\chi'(g)\mathrm{d}\mu(g)$. Le lemme suivant, qui exprime l'orthogonalité entre $\chi \not\equiv 1$ et le caractère trivial est particulièrement important et va nous servir plusieurs fois :

Lemme 1.1 *Soit G un groupe compact muni d'une mesure de Haar μ. Alors pour tout caractère χ*

$$\int_G \chi(g)d\mu(g) = \begin{cases} 0 & si\ \chi \not\equiv 1 \\ \mu(G) & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. Cela est clair si $\chi \equiv 1$. Dans le cas contraire, on prend $h \in G$ tel que $\chi(h) \neq 1$. Alors en utilisant l'invariance par translation de μ,

$$\chi(h)\int_G \chi(g)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G \chi(hg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G \chi(g)\mathrm{d}\mu(g),$$

d'où le résultat. □

Supposons G abélien. On note $\hat{G}$ l'ensemble des caractères de G : c'est un groupe abélien, appelé le dual de G, d'élément neutre le caractère trivial. De plus, $\hat{G}$ est un groupe topologique, si on le munit de la topologie compacte ouverte, c'est-à-dire de la topologie pour laquelle un système fondamental de voisinages du caractère trivial est donné par les ensembles de la forme

$$\mathcal{U}(K,V) = \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(K) \subset V\}$$

pour K un compact et V un voisinage de 1 dans $\mathcal{S}^1$. Nous avons alors ([9], Proposition 3-2) :

Lemme 1.2 *Soit G un groupe abélien topologique, $\hat{G}$ son dual muni de la topologie compacte-ouverte.*

1. *Si G est discret, alors $\hat{G}$ est compact.*
2. *Si G est compact, alors $\hat{G}$ est discret.*
3. *Si G est localement compact, $\hat{G}$ l'est également.*

Supposons maintenant que G est localement compact (et donc $\hat{G}$ aussi). Alors il admet une mesure de Haar μ, unique à une constante multiplicative près. Notons comme d'habitude $L^1(G)$ l'espace des fonctions intégrables sur G pour μ. Pour toute fonction $f \in L^1(G)$ on peut définir la transformée de Fourier de f comme la fonction sur $\hat{G}$ donnée par :

$$\mathscr{F}f(\chi) = \int_G f(x)\bar{\chi}(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

pour tout $\chi \in \hat{G}$. On a le théorème d'inversion bien connu suivant, conséquence de la dualité de Pontryagin :

Théorème 1.1 *(Formule d'inversion de Fourier) Pour toute mesure de Haar μ sur G, il existe une mesure $\hat{\mu}$ sur $\hat{G}$ telle que pour toute $f \in L^1(G)$ vérifiant $\mathscr{F}f \in L^1(\hat{G})$, on ait*

$$f(x) = \int_G \mathscr{F}f(\chi)\chi(x)d\hat{\mu}(\chi)$$

pour $\mu-$presque tout x.

En particulier, si la fonction f de départ est continue, la formule donnée est vraie pour tout x. La mesure $\hat{\mu}$ est appelée la mesure duale de μ. En particulier, par unicité de la mesure de Haar à constante multiplicative (strictement positive) près, pour toute mesure de Haar ν sur $\hat{G}$ il existe une constante $c > 0$ telle que $c\nu = \hat{\mu}$, c'est-à-dire telle que la formule d'inversion pour la transformée de Fourier par rapport à ν soit vérifiée à la constante c près.

1.2 Théorie locale

1.2.1 Caractères et dualité

Dans toute cette partie, F désigne le complété d'un corps de nombres pour une valuation v, archimédienne ou non. Dans le cas où v est non-archimédienne, on note $\mathcal{O}_F$ l'anneau de valuation, k le corps résiduel et on fixe une uniformisante ϖ. On normalise la valeur absolue correspondante $|\cdot|$ sur F de telle sorte que

$|\cdot|$ = valeur absolue usuelle si $F = \mathbf{R}$
$|\cdot|$ = le carré du module usuel si $F = \mathbf{C}$
$|x| = q^{-v(x)}$ si v est non-archimédienne,

où $q = \#k$ est le nombre d'éléments du corps résiduel de F. Nous savons que F est localement compact. Plus précisément, nous avons le fait bien connu suivant :

Lemme 1.3 *Les ensembles relativement compacts de F sont exactement les ensembles bornés pour $|\cdot|$.*

Nous allons nous intéresser au groupe additif $(F, +)$: dans la suite, quand nous parlerons de F en tant que groupe, ce sera toujours pour la loi d'addition. F muni de sa valuation est alors un groupe topologique localement compact, et admet donc, à multiplication par une constante près, une unique mesure de Haar, qui va être invariante par addition. D'autre part, la structure multiplicative de F nous fournit des automorphismes $x \mapsto xy$ du groupe topologique $(F, +)$ pour tout $y \in F$. Ainsi, si μ est une mesure de Haar sur F, $M \mapsto \mu(yM)$ l'est aussi pour chaque $y \in F$, et est donc proportionnelle à μ.

Lemme 1.4 *Le facteur de proportionnalité est exactement $|y|$. Autrement dit, l'automophisme $x \mapsto xy$ "multiplie les volumes par un facteur $|y|$".*

Démonstration. Si $F = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, les mesures de Haar sont proportionnelles aux mesures de Lebesgue respectivement sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, pour lesquelles c'est bien connu. Supposons donc maintenant F non-archimédien, et prenons d'abord $a \in \mathcal{O}_F$. Alors

$$\mathcal{O}_F = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_F / a\mathcal{O}_F} (a\mathcal{O}_F + x),$$

c'est-à-dire que $\mathcal{O}_F$ est la réunion disjointe de $N((a)) = |a|^{-1}$ translatés de $a\mathcal{O}_F$. Grâce à l'invariance par translation, ceux-ci ont tous la même mesure, qui sera donc $|a|\mu(\mathcal{O}_F)$. Dans le cas où $a \notin \mathcal{O}_F$, on obtient le même résultat en remplaçant a par a^{-1}. □

Notons $\hat{F}$ le dual topologique de F, c'est-à-dire le groupe des homomorphismes de groupe continus de F dans la sphère unité complexe S^1 muni de la topologie compacte-ouverte. Soit χ un élément de $\hat{F}$. Via les automophismes ci-dessus, nous obtenons pour chaque $y \in F$ une application $\chi_y : x \mapsto \chi(xy)$. C'est clairement un homomorphisme de groupes, continu car $x \mapsto xy$ l'est, donc c'est également un caractère.

Lemme 1.5 *Soit $\chi \in \hat{F}$ non-trivial. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & F & \longrightarrow & \hat{F} \\ & y & \mapsto & \chi_y \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes bicontinu.

Démonstration. Φ est bien définie d'après ce qui précède.

1. Injectivité : si $\chi_y = 1$, alors $\chi(xy) = 1$ pour tout $x \in F$, ce qui si $y \neq 0$ implique $\chi(F) = 1$, contredisant le fait que χ est non-trivial.
2. Continuité : Soit $\mathcal{U}(K, V)$ un voisinage du caractère trivial, où K est un compact de F et V un voisinage de 1 dans S^1. Il nous suffit de trouver $\delta > 0$ tel que $|y| < \delta$ implique $\chi_y \in \mathcal{U}(K, V)$. D'après le lemme 1.3, nous pouvons supposer que $K = \{x \in F,\ |x| \leq M\}$ pour un certain $M > 0$. Il s'agit donc de trouver δ tel que $|y| < \delta$ implique $\chi(yK) \subset V$. Or, χ étant continu, il existe η tel que pour $|x| < \eta$, $\chi(x) \in V$. Il suffit alors de prendre $\delta = \frac{\eta}{M}$.
3. Bicontinuité : Soit x_0 tel que $\chi(x_0) \neq 1$. Soit V un voisinage de 1 dans S^1 qui ne contient pas $\chi(x_0)$ et K est un compact, que l'on peut supposer de la forme $\{|x| \leq M\}$. Si y est tel que $\chi_y \in \mathcal{U}(K, V)$, alors $\chi(yK) \subset V$, donc $x_0 \notin yK$, donc $|y| < \frac{|x_0|}{M}$, d'où la continuité de l'inverse.
4. Densité de l'image : Montrons que la famille des χ_y, $y \in F$ est dense dans $\hat{F}$. Il suffit de voir qu'il existe un χ_y dans tout voisinage $\mathcal{U}(K, V)$ du caractère trivial, K étant un compact de F, inclus par exemple dans $\{|x| \leq M\}$, et V un voisinage de 1 dans $\mathcal{S}^1$. Par continuité de χ, il existe un $\delta > 0$ tel que $|x| < \delta$ implique $\chi(x) \in V$. Si on choisit y tel que $|y| \leq \frac{\delta}{M}$, on a $yK \subset \{|x| \leq \delta\}$, et donc $\chi_y(K) \subset V$, c'est-à-dire $\chi_y \in \mathcal{U}(K, V)$.
5. Surjectivité : Φ est un homéomorphisme continu sur son image, donc cette dernière est un sous-groupe localement compact de $\hat{F}$, donc complet, donc fermé. Grâce à la densité, elle est égale à tout $\hat{F}$. □

1.2.2 Le caractère standard

Nous avons donc montré que F est isomorphe à son dual. Cependant, l'isomorphisme est loin d'être canonique : il dépend du choix du caractère χ. Nous allons choisir un caractère non-trivial particulier, appelé caractère standard, grâce auquel nous fixerons un isomorphisme entre F et $\hat{F}$ une bonne fois pour toutes.
Soit $F_0 = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}_p$ pour un nombre premier p. Nous allons commencer par définir une application λ de F_0 dans les réels modulo 1.

(a) Si $F_0 = \mathbf{R}$, on pose $\lambda(x) = -x \pmod 1$.

(b) Si $F_0 = \mathbf{Q}_p$, λ va être l'application « partie polaire » définie comme suit : pour $x \in \mathbf{Q}_p$, $\lambda(x)$ est l'unique nombre rationnel modulo 1 de dénominateur une puissance de p et tel que $\lambda(x) - x \in \mathbf{Z}_p$. Plus explicitement, en écrivant de manière unique

$$x = \sum_{i=-n}^{-1} x_i p^i + x_0$$

où $x_0 \in \mathbf{Z}_p$, on a

$$\lambda(x) = \sum_{i=-n}^{-1} x_i p^i \pmod 1.$$

L'application λ est clairement non triviale. On voit facilement qu'elle est additive. Dans le cas réel elle est manifestement continue. Dans le cas p-adique, elle l'est également car elle est localement constante.

Prenons maintenant pour F_0 le complété de $\mathbf{Q}$ pour la restriction à $\mathbf{Q}$ de la valeur absolue sur F. Alors $F_0 = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}_p$ comme ci-dessus et on peut définir :

$$\begin{array}{rccl} \Lambda : & F & \longrightarrow & \mathbf{R} \pmod 1 \\ & x & \mapsto & \lambda(\mathrm{tr}_{F/F_0}(x)). \end{array}$$

L'application Λ est additive car λ l'est, et nous avons donc un caractère non-trivial $\psi : x \mapsto e^{2i\pi\Lambda(x)}$. En particulier, dans le cas archimédien, on obtient $x \mapsto e^{-4i\pi \mathrm{Re}(x)}$ si $F = \mathbf{C}$ et $x \mapsto e^{-2i\pi x}$ si $F = \mathbf{R}$.
Á partir de maintenant, nous allons donc identifier F et $\hat{F}$ via l'isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \hat{F} \\ y & \mapsto & \left(\psi_y : x \mapsto e^{2i\pi\Lambda(xy)}\right) \end{array} \tag{1}$$

Conducteur du caractère standard Supposons F non-archimédien, $F_0 = \mathbf{Q}_p$ pour un nombre premier p. Soit $n \in \mathbf{Z}$ et $y \in F$. Le caractère ψ_y est trivial sur $\varpi^n \mathcal{O}_F$ si et seulement si $\Lambda(xy) = 1$ pour tout $x \in \varpi^n \mathcal{O}_F$, ce qui d'après la définition de Λ ne peut avoir lieu que si $\mathrm{tr}_{F/F_0}(xy) \in \mathbf{Z}_p$ pour tout $x \in \varpi^n \mathcal{O}_F$, c'est-à-dire si

$$y\varpi^n \in \mathcal{D}_{F/F_0}^{-1} = \{z \in F,\ \mathrm{tr}(z\mathcal{O}_F) \subset \mathbf{Z}_p\}$$

où $\mathcal{D}_{F/F_0}$ (que nous noterons plus simplement $\mathcal{D}_F$) est la différente de F. Ainsi, si on note $\nu_y = \min\{n,\ \psi_y \text{ trivial sur } \varpi^n \mathcal{O}_F\}$, on a

$$\varpi^{\nu_y} \mathcal{O}_F = y^{-1} \mathcal{D}_F^{-1}, \tag{2}$$

c'est-à-dire que $\nu_y = v(y^{-1}\mathcal{D}_F^{-1})$. En particulier, le conducteur de $\psi = \psi_1$ est $\mathcal{D}_F^{-1}$.

1.2.3 Transformée de Fourier

Transformation de Fourier Soit $\mathrm{d}x$ une mesure de Haar sur F. Grâce à l'isomorphisme entre F et son dual, nous pouvons voir la transformée de Fourier d'une fonction sur F également comme une fonction sur F :

Définition 1.1 *Soit $f : F \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable. On définit sa transformée de Fourier par rapport à la mesure $\mathrm{d}x$ comme*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{F}f : & F & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & y & \mapsto & \int f(x) e^{-2\pi i \Lambda(xy)} \mathrm{d}x \end{array}$$

Choix d'une mesure de Haar Avant de continuer, il convient de fixer une mesure de Haar sur F. Comme nous l'avons déjà évoqué, F est un groupe localement compact, muni d'une mesure de Haar unique à constante multiplicative près. Chaque mesure de Haar $\mathrm{d}x$ sur F donne lieu à une mesure de Haar duale sur $\hat{F}$ pour laquelle la formule d'inversion de Fourier est vérifiée. Via l'identification (1), nous pouvons dire que $\mathrm{d}x$ est autoduale si elle est égale à sa mesure duale. La mesure $\mathrm{d}x$ peut toujours être rendue autoduale après multiplication par une constante, d'après la remarque en dessous du théorème 1.1. En effet, supposons que pour $\mathrm{d}x$ la formule d'inversion soit vraie à une constante $c_0 > 0$ près. Il suffit alors de remplacer $\mathrm{d}x$ par $c_0^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$. Nous avons donc, en adaptant le théorème 1.1 à notre cadre particulier,

Théorème 1.2 *(Formule d'inversion de Fourier) Il existe une mesure de Haar* $\mathrm{d}x$ *sur* F *telle que pour toute fonction* $f : F \longrightarrow \mathbf{C}$ *continue intégrable de transformée de Fourier intégrable, et pour tout* $x \in F$,

$$f(x) = \int \mathscr{F} f(y) \exp(2\pi i \Lambda(xy)) \mathrm{d}y = \mathscr{F}\mathscr{F} f(-x).$$

Afin d'avoir une écriture commode de la formule d'inversion de Fourier, nous allons donc choisir la mesure sur F pour qu'elle soit autoduale.

Supposons $F = \mathbf{R}$. Il est classique que $x \mapsto \exp(-\pi x^2)$ est sa propre transformée de Fourier pour la mesure de Lebesgue usuelle. Ainsi, la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbf{R}$ est autoduale. Pour $F = \mathbf{C}$, fixons une mesure de Haar $c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où c est la constante à déterminer et $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}$, et choisissons la fonction $f : (x+iy) \mapsto \exp\left[-2\pi(x^2+y^2)\right]$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} f(u+it) &= \int_{\mathbf{C}} \exp\left(-2\pi(x^2+y^2)\right) \exp\left(4\pi i \mathrm{Re}((u+it)(x+iy))\right) c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= c\left(\int_{\mathbf{R}} \exp(-2\pi(x^2-2ixu))\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbf{R}} \exp(-2\pi(y^2-2iyt))\mathrm{d}y\right) \\
&= c\exp(-2\pi(u^2+t^2))\left(\int_{\mathbf{R}} \exp(-2\pi x^2)\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \frac{c}{2}\exp(-2\pi(u^2+t^2))
\end{aligned}$$

Ainsi, f est sa propre transformée de Fourier à condition de choisir $c = 2$.

Supposons maintenant F non-archimédien, notons $\wp = \varpi\mathcal{O}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$, et fixons une mesure de Haar $\mathrm{d}x$ sur F. Cette dernière ne dépend d'après le lemme 1.4 que du volume qu'elle donne à $\mathcal{O}_F$, que nous noterons $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F, \mathrm{d}x)$. Il suffit donc de voir pour quelle valeur de ce volume la formule d'inversion est vérifiée. Puisque d'après (2) le conducteur de ψ_y est $y^{-1}\mathcal{D}_F^{-1}$,

$$\mathscr{F}\mathbf{1}_{\wp^n}(y) = \int_{\wp^n} \psi(xy)\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{vol}(\wp^n, \mathrm{d}x) & \text{si } y \in \wp^{-n}\mathcal{D}_F^{-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque d'après le lemme 1.4, $\mathrm{vol}(\wp^n, \mathrm{d}x) = (N\wp)^{-n}\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F, \mathrm{d}x)$, nous avons

$$\mathscr{F}(\mathbf{1}_{\wp^n}) = N(\wp)^{-n}\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F, \mathrm{d}x)\mathbf{1}_{\wp^{-n}\mathcal{D}_F^{-1}}. \tag{3}$$

En appliquant cette formule de nouveau pour l'idéal $\wp^{-n}\mathcal{D}_F^{-1}$, nous obtenons

$$\mathscr{F}\mathscr{F}(\mathbf{1}_{\wp^n}) = N(\wp)^{-n}\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F, \mathrm{d}x)N(\wp)^n N(\mathcal{D}_F)\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F, \mathrm{d}x)\mathbf{1}_{\wp^n} = \mathrm{vol}(\mathcal{O}_F, \mathrm{d}x)^2 N(\mathcal{D}_F)\mathbf{1}_{\wp^n}.$$

Ainsi, pour que la formule d'inversion soit vérifiée, il faut et il suffit que $\mathcal{O}_F$ ait pour volume $N(\mathcal{D}_F)^{-\frac{1}{2}} = d_F^{-\frac{1}{2}}$ où d_F est le discriminant de F.

Conclusion. Nous allons donc choisir les mesures suivantes sur F :

$\mathrm{d}x$ = mesure de Lebesgue usuelle si $F = \mathbf{R}$
$\mathrm{d}x$ = le double de la mesure de Lebesgue usuelle si $F = \mathbf{C}$
$\mathrm{d}x$ = la mesure telle que $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F, \mathrm{d}x) = N(\mathcal{D}_F)^{-\frac{1}{2}}$ si F non-archimédien.

Pour ces mesures, la formule d'inversion de Fourier telle qu'elle est énoncée dans le théorème 1.2 est vérifiée. Remarquons en outre que (2) nous donne

$$\mathscr{F}\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F} = N(\mathcal{D}_F)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{\mathcal{D}_F^{-1}}. \tag{4}$$

1.3 Théorie globale

1.3.1 Généralités sur les produits restreints

Donnons-nous Σ un ensemble d'indices, et pour tout $v \in \Sigma$ un groupe localement compact G_v (noté multiplicativement dans ce paragraphe) et un sous-groupe ouvert H_v compact pour presque tout v, c'est-à-dire pour v en dehors d'un sous-ensemble fini Σ_∞ de Σ.

Définition 1.2 *On définit le produit restreint G des G_v par rapport aux H_v par*

$$G = \left\{ (x_v)_v \in \prod_{v \in \Sigma} G_v \quad \textit{avec } x_v \in H_v \textit{ pour presque tout } v \right\} \subset \prod_{v \in \Sigma} G_v.$$

Pour chaque sous-ensemble fini $S \supset \Sigma_\infty$ de Σ, soit G_S le sous-groupe de G défini par

$$G_S = \prod_{v \in S} G_v \times \prod_{v \notin S} H_v \subset G.$$

Si $S \subset T$, alors $G_S \subset G_T$, et $G = \varinjlim G_S$ où S parcourt tous les sous-ensembles finis de Σ contenant Σ_∞. Chaque G_S est muni de la topologie produit, et est localement compact car les G_v sont localement compacts et les H_v, $v \notin S$, sont compacts.
Nous allons munir G de la topologie limite inductive relativement aux G_S, c'est-à-dire la topologie la plus fine telle que les inclusions $G_S \subset G$ soient continues.

Lemme 1.6 *Une base d'ouverts de G pour la topologie limite inductive est donnée par les sous-ensembles de la forme*

$$\prod_{v \in \Sigma} U_v$$

où $U_v \subset G_v$ est ouvert pour tout v, et $U_v = H_v$ pour presque tout v.

Démonstration. Soit U un ensemble de cette forme, et soit S l'ensemble des v pour lesquels $U_v \neq H_v$. Alors $U \subset G_S$ est ouvert pour la topologie produit, donc U est ouvert dans G. Réciproquement, soit U un ouvert de G, soit S un sous-ensemble fini de Σ. Alors $G_S \cap U$ est un ouvert de G_S, donc de la forme donnée par l'énoncé. Puisque $U = \cup_S (G_S \cap U)$, U est bien union d'ouverts de la forme souhaitée. $\square$

Lemme 1.7 *Un sous-ensemble de G est relativement compact si et seulement s'il est contenu dans un ensemble de la forme $\prod_v B_v$ où B_v est un compact de G_v pour tout v, et $B_v = H_v$ pour presque tout v.*

Démonstration. Puisque les G_S recouvrent G, tout sous-ensemble compact de G peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts de la forme G_S. D'autre part, si $S_1, \ldots, S_m$ sont des sous-ensembles finis de Σ, $G_{S_1} \cup \ldots \cup G_{S_m} = G_{S_1 \cup \ldots \cup S_m}$. Un compact C de G est donc toujours inclus dans un ouvert de la forme G_S. Le morphisme de projection $p_v : G \longrightarrow G_v$ est continu car sa restriction à chaque G_S l'est. Ainsi, pour tout v, $B_v = p_v(C)$ est un compact de G_v, inclus dans H_v pour presque tout v. Or nous avons $C \subset \prod_v B_v$, qui est bien de la forme souhaitée. Réciproquement, un ensemble de cette forme est un produit de compacts, donc compact. Tout fermé contenu dedans est donc compact également. $\square$

Pour finir, notons quelques sous-groupes particuliers. Pour chaque $S \subset \Sigma$ fini contenant Σ_∞, on peut définir $G^S = \prod_{v \in S}\{1\} \times \prod_{v \notin S} H_v$, sous-groupe compact de G_S, tel que $G_S = G^S \times \prod_{v \in S} G_v$. En outre, chaque G_v se plonge de manière canonique dans G en envoyant l'élément x_v sur l'élément dont la composante suivant G_v vaut x_v et les autres valent 1.

Caractères et quasi-caractères sur les produits restreints. Dans ce paragraphe nous allons montrer que le groupe des caractères du produit restreint G est lui-même un produit restreint bien choisi. Soit $c : G \longrightarrow \mathbf{C}^*$ un quasi-caractère, c'est-à-dire une application continue et multiplicative. Notons c_v sa restriction à G_v, qui est bien sûr un quasi-caractère de G_v. Le lemme suivant donne un sens au « produit » (a priori infini) de tous les c_v et montre qu'on peut voir c comme égal à ce produit.

Lemme 1.8 *Pour presque tout v, c_v est trivial sur H_v, et nous pouvons écrire pour tout $x \in G$,*

$$c(x) = \prod_v c_v(x_v).$$

Démonstration. Soit V un voisinage de 1 dans $\mathbf{C}^*$, que nous choisissons suffisamment petit pour qu'il ne contienne aucun sous-groupe multiplicatif non-trivial de $\mathbf{C}^*$. Par continuité de c et grâce au lemme 1.6, il existe un voisinage $U = \prod_v U_v$ de 0 dans G tel que $c(U) \subset V$, avec $U_v = H_v$ pour v en dehors d'un certain ensemble fini S. Alors $c(G^S) \subset c(U) \subset V$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{C}^*$, et donc $c(G^S) = \{1\}$, ce qui en particulier implique $c(H_v) = c_v(H_v) = 1$ pour tout $v \notin S$. Chaque élément x de G s'écrit $x = (\prod_{v \in S} x_v)x^S$ avec $x^S \in G^S$, d'où

$$c(x) = \prod_{v \in S} c(x_v)c(x^S) = \prod_{v \in S} c_v(x_v) = \prod_{v \in \Sigma} c_v(x_v).$$

□

Réciproquement, si on choisit bien une famille de caractères c_v sur chaque G_v, le lemme suivant dit qu'on peut former leur produit, et que ce dernier sera un quasi-caractère.

Lemme 1.9 *Soit, pour chaque v, c_v un quasi-caractère de G_v, trivial sur H_v pour presque tout v. Alors $c = \prod_v c_v$ définit un quasi-caractère de G.*

Démonstration. L'application c est bien définie et multiplicative de G dans $\mathbf{C}^*$. Montrons sa continuité : soit V un voisinage de 1 dans $\mathbf{C}^*$. Soit S l'ensemble des places v telles que $c_v(H_v) \neq 1$ et s le cardinal de S. Alors on peut choisir un voisinage W de 1 dans $\mathbf{C}^*$ tel que $W^s = \{w_1 \dots w_s | w_1, \dots, w_s \in W\} \subset V$. Pour chaque $v \in S$, par continuité de c_v il existe un voisinage U_v de 0 dans G_v tel que $c_v(U_v) \subset W$. Si on pose $U = \prod_{v \in S} U_v \prod_{v \notin S} H_v$, on a $c(U) = \prod_{v \in S} c_v(U_v) \subset W^s \subset V$, ce qui conclut. □

Les deux lemmes restent clairement vrais si on remplace partout « quasi-caractère » par « caractère ». Notons, pour tout $v \in \Sigma$, $\hat{G}_v$ le groupe des caractères de G_v et $H_v^\perp \subset \hat{G}_v$ le sous-groupe des caractères triviaux sur H_v, qui est ouvert, et compact pour $v \notin \Sigma_\infty$: en effet, il est ouvert car $\hat{G}_v/H_v^\perp$ est discret en tant que dual du groupe compact H_v, et il est compact en tant que dual du groupe quotient G_v/H_v, qui est discret car H_v est ouvert. Les deux lemmes précédents appellent alors l'isomorphisme suivant :

Théorème 1.3 *Il y a un isomorphisme de groupes topologiques entre le produit restreint des $\hat{G}_v$ par rapport aux $H_v^\perp$ et le dual de G, identifiant l'élément $(c_v)_v$ avec le caractère $\prod_v c_v$.*

Démonstration. Le morphisme est bien défini, et est un isomorphisme algébrique grâce aux deux lemmes. Il suffit d'en vérifier la bicontinuité. Prenons un voisinage du caractère trivial dans $\hat{G}$, qui peut être choisi de la forme $\mathcal{U}(B, V)$ où V voisinage de 1 dans $\mathbf{C}^*$ ne contenant pas de sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{C}^*$ et B compact de G tel que pour tout $c \in \mathcal{U}(B, V)$,

$c(B) \subset V$. Quitte à agrandir B, on peut le choisir de la forme $\prod_v B_v$ où B_v est un compact de G_v pour tout v, et $B_v = H_v$ pour presque tout v. Pour tout $c \in \mathcal{U}(B, V)$, la restriction $c_v \in \hat{G}_v$ de c à G_v appartient au voisinage $\mathcal{U}(B_v, V)$ du caractère trivial dans $\hat{G}_v$ si $B_v \neq H_v$, et appartient à $H_v^\perp$ sinon. Donc c_v appartient au voisinage $\prod_{B_v \neq H_v} \mathcal{U}(B_v, V) \prod_{B_v = H_v} H_v^\perp$ de 1 dans le produit restreint des $\hat{G}_v$ par rapport aux $H_v^\perp$. Réciproquement, si $(c_v)_v$ appartient à un voisinage de 1, qui peut être choisi de la forme $\prod_{v \in S} \mathcal{U}(B_v, V) \prod_{v \notin S} H_v^\perp$ pour un sous-ensemble fini $S \subset \Sigma$, le raisonnement se remonte aisément pour montrer que $c \in \mathcal{U}(B, V)$ où $B = \prod_{v \in S} B_v \prod_{v \notin S} H_v$. □

Mesures sur les produits restreints. Supposons que nous avons choisi sur chaque G_v une mesure de Haar $\mathrm{d}x_v$, de telle sorte que $\int_{H_v} \mathrm{d}x_v = 1$ pour presque tout v. On aimerait, dans le prolongement de ce que nous avons fait pour les caractères, donner un sens à la mesure produit $\prod_v \mathrm{d}x_v$.

Pour commencer, choisissons un sous-ensemble fini $S \supset \Sigma_\infty$ de Σ. Nous avons déjà vu que nous pouvions écrire $G_S = G^S \times \left(\prod_{v \in S} G_v\right)$. Le groupe G^S est compact, et admet donc une mesure de Haar dx^S que nous pouvons normaliser de telle sorte que $\int_{G^S} dx^S = \prod_{v \notin S} \left(\int_{H_v} dx_v\right)$, le produit étant fini car presque tous ses termes sont égaux à 1 par hypothèse. Nous pouvons alors aisément définir sur G_S la mesure $dx_S = dx^S \left(\prod_{v \in S} dx_v\right)$. Puisque les G_S forment un recouvrement ouvert de G, par intérieure régularité des mesures de Haar, pour définir une mesure de Haar dx sur G il suffit d'imposer $dx = dx_S$ sur G_S. Pour que cela soit bien défini, il reste à vérifier que si $T \supset S$ est un sous-ensemble fini de Σ plus grand, dx_S et dx_T coïncident sur G_S.

Nous avons $G^S = G^T \prod_{v \in T-S} H_v$, et le terme de droite peut être muni de la mesure de Haar produit $dx^T \prod_{v \in T-S} dx_v$, qui lui donne par définition un volume

$$\int_{G^T} dx^T \prod_{v \in T-S} \int_{H_v} dx_v = \prod_{v \notin T} \int_{H_v} dx_v \prod_{v \in T-S} \int_{H_v} dx_v = \prod_{v \notin S} \int_{H_v} dx_v = \int_{G^S} dx^S,$$

et coïncide donc avec dx^S. Ainsi,

$$dx_S = dx^S \prod_{v \in S} dx_v = dx^T \prod_{v \in T-S} dx_v \prod_{v \in S} dx_v = dx^T \prod_{v \in T} dx_v = dx_T,$$

et nous pouvons définir sur G une mesure dx coïncidant avec dx_S sur G_S, et que nous noterons, au vu de sa définition sur chaque G_S, $dx = \prod_v dx_v$.

Grâce au théorème 1.3 qui munit $\hat{G}$ également d'une structure de produit restreint, nous pouvons de la même manière construire une mesure sur le groupe de caractères $\hat{G}$ de G. En effet, soit dc_v la mesure sur $\hat{G}_v$ duale à dx_v. Afin de pouvoir appliquer aux dc_v le raisonnement ci-dessus, il suffit de montrer que $\int_{H_v^\perp} dc_v = 1$ pour presque tout v. Pour cela, calculons pour tout $v \notin \Sigma_\infty$ la transformée de Fourier de la fonction caractéristique du compact H_v :

$$\mathscr{F}\mathbf{1}_{H_v}(c_v) = \int_{H_v} \overline{c_v(x_v)} dx_v = \begin{cases} \int_{H_v} dx_v & \text{si } c_v \text{ trivial sur } H_v \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc $\mathscr{F}\mathbf{1}_{H_v} = \left(\int_{H_v} dx_v\right) \mathbf{1}_{H_v^\perp}$. En itérant, nous avons $\mathscr{F}\mathscr{F}\mathbf{1}_{H_v} = \left(\int_{H_v} dx_v\right) \left(\int_{H_v^\perp} dc_v\right) \mathbf{1}_{H_v}$. La formule d'inversion de Fourier donne alors

$$\left(\int_{H_v} dx_v\right) \left(\int_{H_v^\perp} dc_v\right) = 1,$$

c'est-à-dire que $\int_{H_v^\perp} dc_v = 1$ pour tout $v \notin \Sigma_\infty$. Nous pouvons donc définir sur $\hat{G}$ la mesure $dc = \prod_v dc_v$. Après avoir étudié la notion de transformée de Fourier sur G, nous pourrons montrer que dc est en fait la mesure duale à dx.

Intégration sur un produit restreint. Maintenant que nous avons une mesure sur G, nous aimerions étudier comment se fait concrètement le calcul de l'intégrale d'une fonction intégrable sur G. Choisissons pour chaque v une fonction $f_v : G_v \longrightarrow \mathbf{C}$ continue telle que $f_{v|H_v} = 1$ pour presque tout v, de sorte à ce que le produit $f = \prod_v f_v$ ait un sens, et définisse une fonction $f : G \longrightarrow \mathbf{C}$. Au vu de la définition de la mesure dx, nous aimerions, si f intégrable, obtenir une relation du genre

$$\int_G f(x)dx = \prod_v \left(\int_{G_v} f_v(x_v)dx_v \right). \tag{5}$$

Tout d'abord il faut bien entendu que $f_v \in \mathrm{L}^1(G_v)$ pour tout v. Nous allons encore une fois nous servir des ouverts G_S, en commençant par établir cette relation sur chaque G_S suffisamment grand. Soit S un sous-ensemble fini de Σ contenant au moins les indices v pour lesquels $f_{v|H_v} \neq 1$ ou $\int_{H_v} dx_v \neq 1$. Alors pour tout $x \in G_S$, $f(x) = \prod_{v\in S} f_v(x_v)$: en particulier, si les f_v sont continues, f l'est aussi, étant un produit fini de fonctions continues sur chaque G_S. Elle est donc mesurable, et par définition de dx_S,

$$\int_{G_S} f(x)dx = \int_{G_S} f(x)dx_S = \left(\prod_{v\in S} \int_{G_v} f_v(x_v)dx_v \right) \left(\int_{G^S} dx^S \right) = \prod_{v\in S} \int_{G_v} f_v(x_v). \tag{6}$$

Puisque $\int_{H_v} f_v(x_v)dx_v = \int_{H_v} dx_v = 1$ d'après les deux hypothèses sur S, la relation (5) a un sens et est vérifiée sur G_S. Il nous reste à "passer à la limite" pour S grand.

Soit φ une fonction sur les parties finies de Σ, à valeurs dans un espace topologique E. Soit $\varphi_0 \in E$. On dit alors que $\varphi(S)$ converge vers φ_0, et on note $\lim_S \varphi(S) = \varphi_0$, si pour tout voisinage V de φ_0, il existe un ensemble fini d'indices $S(V)$ tel que $S \supset S(V)$ implique $\varphi(S) \in V$. Ici, $\varphi(S) = \prod_{v\in S} \int_{G_v} f_v(x_v)dx_v$, et $E = \mathbf{C}$. Le lemme suivant nous dit que l'intégrale d'une fonction sur G s'exprime effectivement comme limite en ce sens-là de la même fonction sur les G_S.

Lemme 1.10 *Si f est une fonction mesurable $G \longrightarrow \mathbf{C}$, alors*

$$\int_G f(x)dx = \lim_S \int_{G_S} f(x)dx$$

dès que

(a) ou bien f est réelle positive, auquel cas les intégrales considérées peuvent valoir $+\infty$;

(b) ou bien f est intégrable sur G, auquel cas les intégrales considérées sont des nombres complexes.

Démonstration. D'après les propriétés générales sur les mesures de Haar, pour tout voisinage V de $\int_G f(x)dx$ dans $\mathbf{C}$, il existe un compact suffisamment grand B de G tel que $\int_B f(x)dx \in V$. Or tout compact est inclus dans un G_S. □

Au vu de cela, nous pouvons formuler le résultat suivant :

Proposition 1.1 *Soit pour tout v une fonction f_v continue et intégrable sur G_v telle que $f_{v|H_v} = 1$ pour presque tout v, de sorte que $f = \prod_v f_v$ définisse une fonction continue sur G. Si on suppose*

$$\prod_v \left(\int_{G_v} |f_v(x_v)| dx_v \right) = \lim_S \prod_{v \in S} \left(\int_{G_v} |f_v(x_v)| dx_v \right) < \infty \tag{7}$$

alors f est intégrable sur G et

$$\int_G f(x) dx = \prod_v \left(\int_{G_v} f_v(x_v) dx_v \right).$$

Démonstration. Considérons d'abord la fonction $|f| = \prod_v |f_v|$. Le premier point du lemme 1.10 et la relation (6) appliqués à cette dernière, ainsi que l'hypothèse de finitude (7) permettent d'affirmer que f est intégrable. Ensuite on applique le second point du lemme 1.10 et la relation (6) pour avoir la valeur de $\int_G f(x)dx$. $\square$

Analyse de Fourier dans un produit restreint. Nous terminons notre paragraphe sur le bon comportement des produits restreints par quelques renseignements sur la transformation de Fourier.

Lemme 1.11 *Soit pour tout v une fonction $f_v \in \mathrm{L}^1(G_v)$ continue, égale pour presque tout v à la fonction caractéristique de H_v. Alors la fonction $f = \prod_v f_v$ a pour transformée de Fourier $\mathscr{F} f(c) = \prod_v \mathscr{F} f_v(c_v)$. Si de plus $\mathscr{F} f_v$ est intégrable pour tout v, $\mathscr{F} f$ l'est également.*

Démonstration. Puisque par hypothèse $\int_{G_v} |f_v(x_v)| dx_v = 1$ pour presque tout v, nous pouvons appliquer la proposition 1.1 à la fonction $f(x)\overline{c(x)} = \prod_v f_v(x_v)\overline{c_v(x_v)}$, ce qui nous donne l'expression voulue de $\mathscr{F} f$ comme produit des $\mathscr{F} f_v$. D'après un calcul précédent, pour presque tout v, $\mathscr{F} f_v = \mathbf{1}_{H_v^\perp}$. Ainsi, si f_v est intégrable pour tout v, la proposition 1.1 nous donne également que $\mathscr{F} f$ est intégrable. $\square$

Supposons que les $\mathscr{F} f_v$ sont toutes intégrables. Appliquons le lemme au groupe $\hat{G}$ muni de la mesure dc, ce qui donne :

$$\mathscr{F}\mathscr{F} f(x) = \prod_v \mathscr{F}\mathscr{F} f_v(x_v) = \prod_v f_v(x_v)$$

qui n'est autre que la formule d'inversion qui nous révèle que la mesure dc que nous avions construite comme le produit des dc_v duales aux dx_v est bien duale elle-même à $dx = \prod_v dx_v$.

1.3.2 L'anneau des adèles

Dans cette section, F désigne un corps de nombres, Σ_F l'ensemble des places de F. Pour chaque $v \in \Sigma_F$, on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau de valuation de F_v si v est non-archimédienne, $\mathcal{O}_v = F_v$ si v archimédienne. Plus généralement, tous les objets Λ, $\mathcal{D}$, $|\cdot|$, dx, que nous avons considérés plus haut dans le cadre d'un seul corps local se verront munis ici d'un indice v quand ils se rapportent au corps F_v. L'anneau des adèles de F est le produit restreint des F_v par rapport aux $\mathcal{O}_v$, c'est-à-dire le groupe topologique défini par :

$$\mathbf{A}_F = \{(x_v)_v \in \prod_{v \in \Sigma_F} F_v,\ x_v \in \mathcal{O}_v \text{ pour presque tout } v\} \subset \prod_v F_v.$$

Le produit coordonnée par coordonnée munit en outre $\mathbf{A}_F$ d'une structure d'anneau. La multiplication est continue car sa restriction à chaque $\mathbf{A}_{F,S}$ l'est, donc $\mathbf{A}_F$ est un anneau topologique. Tous les résultats du paragraphe précédent sur les produits restreints s'appliquent à l'anneau des adèles. En particulier, le dual de l'anneau des adèles est le produit restreint des F_v par rapport aux sous-groupes $\mathcal{D}_v^{-1}$. Puisque $\mathcal{D}_v^{-1} = \mathcal{O}_v$ pour presque tout v, ce dual est encore isomorphe (algébriquement et topologiquement) à $\mathbf{A}_F$. L'isomorphisme entre F_v et son dual était obtenu en associant à $y_v \in F_v$ le caractère $x_v \mapsto e^{2i\pi\Lambda_v(x_v y_v)}$. Si $y_v \in \mathcal{O}_v$ pour presque tout v, ce caractère est trivial sur $\mathcal{O}_v$ pour presque tout v. En posant pour $x \in \mathbf{A}_F$, $\Lambda(x) = \sum_{v\in\Sigma_F} \Lambda_v(x_v)$ (la somme est finie), nous obtenons alors pour chaque $y \in \mathbf{A}_F$, comme dans le lemme 1.9, un caractère $x \mapsto \prod_v e^{2i\pi\Lambda_v(x_v y_v)} = e^{2i\pi\Lambda(xy)}$. Nous avons donc prouvé :

Proposition 1.2 *L'isomorphisme de groupes topologiques*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_F & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{A}_F} \\ y & \mapsto & e^{2i\pi\Lambda(xy)} \end{array} \tag{8}$$

identifie naturellement $\mathbf{A}_F$ et son dual.

Chaque idèle, c'est-à-dire chaque élément a du groupe des idèles

$$\mathbf{A}_F^* = \{(a_v)_v \in \prod_v F_v^* \mid a_v \in \mathcal{O}_v^* \text{ pour presque tout } v\},$$

produit restreint des groupes F_v^* par rapport aux sous-groupes compacts $\mathcal{O}_v^*$, induit un automorphisme $x \mapsto ax$ de $\mathbf{A}_F$. Puisque pour tout v, changer dx_v en $\mathrm{d}(a_v x_v)$ (pour $a_v \in F_v^*$) multiplie les volumes par $|a_v|_v$, nous avons le lemme de changement de variable suivant :

Lemme 1.12 *Pour tout idèle a,* $\mathrm{d}(ax) = |a|dx$ *où* $|a| = \prod_v |a_v|$.

Domaine fondamental. Nous disposons du plongement diagonal

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbf{A}_F \\ x & \mapsto & (x, x, \dots) \end{array}$$

bien défini car un élément de F est v-entier pour presque tout v, n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux divisant sont dénominateur. F est donc un sous-groupe additif de $\mathbf{A}_F$. Notons S_∞ l'ensemble (fini) des places archimédiennes de F. Nous avons le théorème d'approximation :

$$F + \mathbf{A}_{F,S_\infty} = \mathbf{A}_F, \tag{9}$$

qui est simplement une reformulation du lemme chinois. Nous pouvons en conclure :

Proposition 1.3 *Le groupe quotient $\mathbf{A}_F/F$ est compact.*

Démonstration. D'après (9), tout adèle x peut être ramené dans $\mathbf{A}_{F,S_\infty}$ par addition d'un élément de F. Rappelons que par le plongement $F \longrightarrow \prod_{v\in S_\infty} F_v$, $\mathcal{O}_F$ peut être vu comme un réseau de rang $n = [F : \mathbf{Q}]$ dans $\prod_{v\in S_\infty} F_v \simeq \mathbf{R}^n$. Nous pouvons donc translater l'adèle obtenu par un élément de $\mathcal{O}_F$ bien choisi pour ramener les composantes suivant S_∞ dans un ensemble borné. $\square$

Si on l'explicite un peu, la preuve précédente permet de donner un domaine fondamental pour $\mathbf{A}_F/F$ dans $\mathbf{A}_F$. En effet, considérons $e_1, \ldots, e_n$ une $\mathbf{Z}$-base de $\mathcal{O}_F$. Alors $e_1, \ldots, e_n$ est une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\prod_{v \in S_\infty} F_v$. On définit le parallélépipède fondamental :

$$D_\infty = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i e_i | \ 0 \leq t_i < 1 \right\}.$$

Alors d'après la preuve précédente, $D = \prod_{v \notin S_\infty} \mathcal{O}_v \times D_\infty$ est un domaine fondamental (compact) pour $\mathbf{A}_F/F$. Autrement dit, $\mathbf{A}_F$ est l'union disjointe des $\xi + D$ pour tout $\xi \in F$.

Lemme 1.13 *Le volume de D pour la mesure de Haar sur $\mathbf{A}_F$ est* 1.

Démonstration. Déterminons d'abord le volume de D_∞. Si on note pour tout i, $e_i^{(1)}, \ldots, e_i^{(n)}$ les conjugués de e_i, un résultat classique de théorie des nombres dit qu'il est égal au déterminant $\det(e_i^{(j)}) = \sqrt{d_F}$ (où d_F est le discriminant de F), en se rappelant qu'on avait pris en les places complexes pour mesure le double de la mesure de Lebesgue usuelle. Or le volume de $\mathbf{A}_{F,S_\infty}$ est, par définition de notre mesure, $\prod_{v \notin S_\infty} d_v^{-\frac{1}{2}} = d_F^{-\frac{1}{2}}$. Le volume total est donc bien égal à 1. □

Caractères sur $\mathbf{A}_F/F$. Chaque élément ξ de $F \subset \mathbf{A}_F$ donne lieu à un caractère $x \mapsto \exp 2\pi i \Lambda(x\xi)$ sur $\mathbf{A}_F$. Le lemme suivant dit que ce dernier sera trivial sur F :

Lemme 1.14 $\Lambda(\xi) = 0$ *pour tout* $\xi \in F$

Démonstration. Pour toute place v de F et une place w de $\mathbf{Q}$ en dessous de v, notons $\mathbf{Q}_w$ le complété de $\mathbf{Q}$ pour w. Pour tout $\xi \in F$,

$$\Lambda(\xi) = \sum_v \Lambda_v(\xi) = \sum_v \lambda_w(\mathrm{tr}_{F_v/\mathbf{Q}_w}(\xi)) = \sum_{w \in \Sigma_\mathbf{Q}} \lambda_w(\sum_{v|w} \mathrm{tr}_{F_v/\mathbf{Q}_w}(\xi)) = \sum_{w \in \Sigma_\mathbf{Q}} \lambda_w(\mathrm{tr}_{F/\mathbf{Q}}(\xi)).$$

On est donc ramené à prouver que pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $\sum_{w \in \Sigma_\mathbf{Q}} \lambda_w(r) \equiv 0 \pmod 1$, c'est-à-dire que $\sum_{w \in \Sigma_\mathbf{Q}} \lambda_w(r)$ est entier. On peut le voir en disant que, puisque pour tout p premier $\lambda_p(r)$ est la partie fractionnaire p-adique de r, la partie non-archimédienne de cette somme est une « décomposition en éléments simples » de r, compensée par la partie archimédienne égale modulo 1 à $-r$. □

Par conséquent, tout élément de F s'injecte dans son orthogonal $F^\perp = \widehat{\mathbf{A}_F/F}$, qui est discret par le lemme 1.2 car $\mathbf{A}_F/F$ est compact. Ainsi, le groupe $F^\perp/F$ est discret et contenu dans le compact $\mathbf{A}_F/F$, donc fini. Or $F^\perp$ est un F-espace vectoriel, ce qui implique, F n'étant pas fini, que $F^\perp = F$. Nous avons donc prouvé

Proposition 1.4 *Le dual de $\mathbf{A}_F/F$ est naturellement identifié à F par l'isomorphisme (8).*

Fonctions périodiques. Soit $\varphi : \mathbf{A}_F \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction périodique, c'est-à-dire telle que $\varphi(x + \xi) = \varphi(x)$ pour tout adèle x et pour tout $\xi \in F$: les fonctions périodiques sur $\mathbf{A}_F$ sont exactement les fonctions sur $\mathbf{A}_F/F$. On définit pour toute φ périodique

$$I(\varphi) = \int_D \varphi(x) dx,$$

ce qui induit une mesure $\mathrm{d}\bar{x}$ sur $\mathbf{A}_F/F$. En notant $\pi : \mathbf{A}_F \longrightarrow \mathbf{A}_F/F$ l'application quotient, un ensemble $A \subset \mathbf{A}_F/F$ est mesurable pour $\mathrm{d}\bar{x}$ si $\pi^{-1}(A) \cap D$ l'est pour dx, et $\int_A \mathrm{d}\bar{x} = \int_{\pi^{-1}(A)\cap D} dx$. Il s'en suit, le volume de D pour $\mathrm{d}x$ étant 1 par le lemme 1.13, que $\mathrm{d}\bar{x}$ est la mesure de Haar sur $\mathbf{A}_F/F$ qui donne à $\mathbf{A}_F/F$ le volume 1.

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbf{A}_F$ telle que $x \mapsto \sum_{\xi\in F} f(x+\xi)$ converge (absolument) uniformément sur les compacts de $\mathbf{A}_F$. On obtient alors une fonction périodique $\varphi : x \mapsto \sum_{\xi\in F} f(x+\xi)$, définie sur D et sur $\mathbf{A}_F/F$. En outre,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{A}_F} f(x)dx &= \int_{\cup_{\xi\in F}(\xi+D)} f(x)dx \\
&= \sum_{\xi\in F}\int_{\xi+D} f(x)dx \\
&= \sum_{\xi\in F}\int_{D} f(x+\xi)dx \\
&= \int_{D}\sum_{\xi\in F} f(x+\xi)dx \\
&= \int_{\mathbf{A}_F/F}\sum_{\xi\in F} f(\bar{x}+\xi)\mathrm{d}\bar{x},
\end{aligned}$$

l'interversion étant justifiée par l'hypothèse sur f et le fait que D est compact. La mesure $\mathrm{d}\bar{x}$ est donc également caractérisée par le fait intuitif que l'intégrale d'une fonction sur $\mathbf{A}_F$ est égale à l'intégrale de sa « périodifiée » sur $\mathbf{A}_F/F$.

1.3.3 Formule de Poisson et théorème de Riemann-Roch

Théorème 1.4 *(Formule de Poisson) Soit f une fonction continue intégrable sur $\mathbf{A}_F$. Supposons de plus*

(i) $\sum_{\xi\in F} f(x+\xi)$ converge uniformément en $x \in D$;

(ii) $\sum_{\xi\in F} |\mathscr{F}f(\xi)|$ converge.

Alors

$$\sum_{\xi\in F} f(\xi) = \sum_{\xi\in F} \mathscr{F}f(\xi).$$

Démonstration. Par hypothèse, on peut définir une fonction périodique $\varphi : x \mapsto \sum_{\xi\in F} f(x+\xi)$, intégrable sur $\mathbf{A}_F/F$. Le côté gauche de l'égalité voulue est alors simplement $\varphi(0)$. D'après la proposition 1.4, $\mathscr{F}\varphi$ définit une fonction sur $\widehat{\mathbf{A}_F/F} = F$. Pour tout $\eta \in F$, nous avons d'après la discussion précédente pour la fonction $x \mapsto f(x)\exp[-2\pi i\Lambda(\eta x)]$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\varphi(\eta) &= \int_D \sum_{\xi\in F} f(x+\xi)\exp[-2\pi i\Lambda(x\eta)]\,dx \\
&= \int_D \sum_{\xi\in F} f(x+\xi)\exp[-2\pi i\Lambda((x+\xi)\eta)]\,dx \\
&= \int_{\mathbf{A}_F} f(x)\exp[-2\pi i\Lambda(\eta x)]\,dx = \mathscr{F}f(\eta)
\end{aligned}$$

car $\Lambda(\xi\eta) = 0$ pour tous les $\xi, \eta \in F$. Ainsi, les transformées $\mathscr{F}\varphi$ et $\mathscr{F}f$ coïncident sur F, ce qui grâce à l'hypothèse (*ii*) prouve l'intégrabilité de $\mathscr{F}\varphi$. Écrivons alors la formule d'inversion pour φ : pour tout $x \in \mathbf{A}_F$,

$$\varphi(x) = \sum_{\xi \in F} \mathscr{F}\varphi(\xi) \exp\left[2\pi i \Lambda(x\xi)\right].$$

En prenant $x = 0$, nous avons le résultat. □

Théorème 1.5 *(Théorème de Riemann-Roch) Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{A}_F$. Supposons de plus*

(i) $\sum_{\xi \in F} f(a(x+\xi))$ *converge uniformément en $x \in D$, pour tout idèle a ;*

(ii) $\sum_{\xi \in F} |\mathscr{F}f(a\xi)|$ *converge pour tout idèle a.*

Alors

$$\sum_{\xi \in F} f(a\xi) = \frac{1}{|a|} \sum_{\xi \in F} \mathscr{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

Démonstration. Posons $g(x) = f(ax)$. Alors avec le changement de variable $x \mapsto xa^{-1}$ qui transforme dx en $|a|^{-1}dx$,

$$\mathscr{F}g(y) = \int f(ax) e^{-2i\pi\Lambda(xy)} dx = \frac{1}{|a|} \int f(x) e^{-2i\pi\Lambda(xya^{-1})} dx = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}f\left(\frac{y}{a}\right).$$

Donc g satisfait les hypothèses du théorème 1.4, ce qui donne bien la formule cherchée. □

Fonctions de Schwarz-Bruhat. Les deux théorèmes précédents sont un peu lourds en hypothèses : il est fréquent, vu l'usage qui en est fait habituellement, de se restreindre à une classe de fonctions appelée fonctions de Schwarz-Bruhat. Pour tout corps local F_v, nous allons dire qu'une fonction $f_v : F_v \longrightarrow \mathbf{C}$ est une fonction de Schwarz-Bruhat (locale) si

- f_v est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à décroissance rapide pour v archimédienne, c'est-à-dire si pour toute fonction polynomiale P sur F_v, $P(x)f(x) \longrightarrow 0$ quand $|x|_v$ tend vers l'infini.
- f_v est localement constante et à support compact pour v non-archimédienne.

Nous dirons que $f = \prod_v f_v : \mathbf{A}_F \longrightarrow \mathbf{C}$ est une fonction de Schwarz-Bruhat (globale) si f_v est de Schwarz-Bruhat pour tout v et si $f_v = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_v}$ pour presque tout v. Ainsi, la partie non-archimédienne d'une fonction de Schwarz-Bruhat est simplement une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques de produits de boules. Nous noterons $\mathcal{S}(F_v)$ l'espace des fonctions de Schwarz-Bruhat locales sur F_v, et $\mathcal{S}(\mathbf{A}_F)$ l'espace des fonctions de Schwarz-Bruhat sur $\mathbf{A}_F$. C'est une classe de fonctions qui se prête extrêmement bien à la transformation de Fourier, car la transformée de Fourier d'une fonction de Schwarz-Bruhat est encore de Schwarz-Bruhat. De plus, les fonctions de Schwarz-Bruhat jouissent de très bonnes propriétés de sommation et de convergence, qui fait qu'elles vérifient aussi bien la formule de Poisson que le théorème de Riemann-Roch ci-dessus.

Théorème de Riemann-Roch géométrique. Dans tout ce qui précède, nous avons toujours supposé pour simplifier que F était un corps de nombres. Tous les résultats que nous avons obtenus s'étendent cependant sans grande peine au cas où F est le corps de fonctions d'une courbe sur un corps fini. Justifions dans ce cadre le lien de ce que nous avons appelé théorème de Riemann-Roch avec le théorème de Riemann Roch pour une courbe sur un corps fini.

Supposons que F est le corps de fonctions d'une courbe C sur $\mathbf{F}_q$. Soit $f = \prod_v \mathbf{1}_{\mathcal{O}_v} \in \mathcal{S}(\mathbf{A}_F)$. Alors pour tout idèle a et pour tout $\xi \in F^*$, nous avons

$$f(a\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(a_v\xi) \geq 0 \text{ pour tout } v \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, pour $\xi \neq 0$, nous avons $f(a\xi)$ non nul si et seulement si $\xi \in L(D)$ où $D = \mathrm{div}(a) = \sum_v v(a_v)[v]$ est le diviseur sur C associé à l'idèle a. Puisque f est une fonction de Schwarz-Bruhat, $\sum_{\xi \in F} f(a\xi)$ converge, et vaut $\mathrm{Card}(L(D))$ d'après ce qui précède. Cela redémontre en particulier que $l(D) = \dim_{\mathbf{F}_q} L(D)$ est finie, et donne $\sum_{\xi\in F} f(a\xi) = q^{l(D)}$.

Le théorème de Riemann-Roch classique fait intervenir via la dualité de Serre une notion de diviseur canonique. Ici la dualité vient de la notion de transformée de Fourier, fixée par le caractère $\psi : \mathbf{A}_F \longrightarrow \mathbf{C}^*$ que nous avons choisi. Soit pour toute place non-archimédienne v, le conducteur $\wp_v^{m_v}$ de ψ_v, égal d'après (2) à $\mathcal{D}_v^{-1}$. Ainsi, $m_v = 0$ pour presque tout v et nous pouvons définir le diviseur $K = -\sum_v m_v[v]$. Alors d'après (4), $\mathscr{F}\mathbf{1}_{\mathcal{O}_v} = N(\wp_v^{m_v})^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{\wp_v^{m_v}}$. Or

$$\prod_v N(\wp_v^{m_v})^{\frac{1}{2}} = \prod_v q^{\deg(v)m_v/2} = q^{\frac{1}{2}\sum_v \deg(v)m_v} = q^{-\deg(K)/2}.$$

Cela implique en particulier que $\deg(K)$ est pair et permet de définir un entier g tel que $\deg(K) = 2g-2$. Alors pour tout $\xi \in F^*$,

$$\mathscr{F}f(a^{-1}\xi) = \begin{cases} q^{1-g} & \text{si } v(\xi) \geq m_v + v(a_v) \text{ pour tout } v \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le côté faisant intervenir $\mathscr{F}f$ compte donc les éléments de $L(K-D)$, c'est-à-dire que

$$\sum_{\xi\in F} \mathscr{F}f(a^{-1}\xi) = q^{l(K-D)}q^{1-g}.$$

Notons finalement que

$$|a|^{-1} = \prod_v q_v^{v(a_v)} = q^{\sum_v v(a_v)\deg(v)} = q^{\deg D}.$$

En combinant le tout,

$$q^{1-g+l(K-D)+\deg D} = q^{l(D)}.$$

Cela nous permet d'énoncer :

Théorème 1.6 *(Riemann-Roch, forme géométrique) Soit F le corps de fonctions d'une courbe sur $\mathbf{F}_q$. Alors il existe un entier g, appelé le genre de la courbe, et un diviseur K de degré $2g-2$ (appelé diviseur canonique de la courbe), tels que pour tout diviseur D,*

$$l(D) - l(K-D) = \deg(D) - g + 1.$$

2 Anneau de Grothendieck des variétés avec exponentielles

2.1 Motivation

Comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, l'intégration motivique requiert l'introduction d'un anneau de Grothendieck sur les variétés. Cependant, puisque notre but ici est de définir un analogue motivique de la transformée de Fourier, c'est-à-dire d'intégrales de la forme

$$\int \varphi(x)\psi(r(xy))\mathrm{d}x,$$

avec φ une fonction de Schwarz-Bruhat, ψ un caractère et r un « noyau » de Fourier, le simple anneau KVar_k sera insuffisant : il faut des objets qui tiennent compte de la pondération par le caractère ψ. Hrushovski et Kazhdan y parviennent en adaptant la notion, venant de la théorie analytique des nombres et de la géométrie, de somme d'exponentielles. Ce sont des sommes de la forme

$$\sum_{x\in X(k)} \psi(f(x))$$

où k est un corps fini, X une variété sur k (ou alors un schéma de type fini sur $\mathbf{Z}$), f une fonction algébrique sur X, et ψ un caractère du type $x \mapsto \exp(\frac{2i\pi}{\lambda}x)$. Ainsi, pour tout corps k, non nécessairement fini, on définit un anneau $\mathrm{KExpVar}_k$, appelé anneau de Grothendieck des variétés avec exponentielles, qui est engendré par des couples de la forme (X, f), où X est une variété sur k et $f : X \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$ une « exponentielle », soumis à des relations semblables à celles utilisées pour définir KVar_k, et qui traduisent les propriétés dont on souhaite que nos sommes d'exponentielles motiviques soient pourvues. Chaque élément $[X, f]$ doit être vu comme un analogue de la somme

$$\sum_{x\in X} \psi(f(x)),$$

où ψ serait un caractère non trivial, bien que cette dernière n'ait pas de réalité propre. L'interprétation de $[X, f]$ comme somme d'exponentielles sera très utile pour faire des calculs avec les éléments de $\mathrm{KExpVar}_k$. De sommation à intégration il n'y a qu'un pas, surtout dans le domaine de l'intégration motivique où toutes les opérations sont plutôt formelles : l'intégrale motivique telle que nous l'utiliserons sera définie à partir de la notion de somme d'exponentielles dans la section suivante, une fois que nous aurons expliqué quel genre de « fonctions » nous souhaitons intégrer.

2.2 Définition

Soit k un corps. On définit le groupe de Grothendieck des variétés, KVar_k, comme le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes $[X]$ de k-variétés, quotienté par les relations

$$[X] - [U] - [X - U]$$

si X est une k-variété, U un ouvert de X, et $X - U$ son fermé complémentaire, muni de sa structure réduite. On définit le groupe de Grothendieck des variétés avec exponentielles, $\mathrm{KExpVar}_k$, comme le groupe abélien libre $\mathbf{Z}[\mathrm{ExpVar}_k]$ engendré par les couples (X, f) où X est une k-variété et $f : X \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$ un morphisme de k-variétés, quotienté par les relations

$$(X, f) - (Y, f \circ u) \tag{10}$$

où $u : Y \longrightarrow X$ k-isomorphisme entre les k-variétés X et Y,

$$(X, f) - (Y, f_{|Y}) - (U, f_{|Y}) \tag{11}$$

quand X est une k-variété, U est un ouvert de X et $Y = X \setminus U$ fermé (muni de sa structure réduite), et enfin

$$(\mathbf{A}^1_k, \mathrm{Id}), \tag{12}$$

où $\mathrm{Id} : \mathbf{A}^1_k \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$ est l'application identité. Comme nous allons le voir, les deux premières relations se traduisent par le fait que l'on peut respectivement faire des changements de variables avec les sommes d'exponentielles, et les découper, alors que la dernière force la propriété $\sum_{x \in \mathbf{A}^1_k} \psi(x) = 0$, bien connue sur les corps finis, et que l'on pourra étendre a des variétés autres que $\mathbf{A}^1_k$ munies d'une $\mathbf{G}_a$-action.

On munit KVar_k d'une structure d'anneau en posant, pour des k-variétés X et Y, $[X][Y] = [X \times_k Y]$. De même, on munit $\mathrm{KExpVar}_k$ d'une structure d'anneau en posant, pour des k-variétés X et Y et des k-morphismes $f : X \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$, $g : Y \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$,

$$[X, f][Y, g] = [X \times_k Y, f \circ \mathrm{pr}_1 + g \circ \mathrm{pr}_2], \tag{13}$$

c'est-à-dire que $X \times_k Y$ est muni du morphisme $(x, y) \mapsto f(x) + g(y)$. L'élément neutre pour ce produit est clairement la classe du point, c'est-à-dire $[\mathrm{Spec}\, k]$ pour KVar_k et $[\mathrm{Spec}\, k, 0]$ pour $\mathrm{KExpVar}_k$. Notons $\mathbf{L}$ la classe de $\mathbf{A}^1_k$ dans KVar_k, et celle de $(\mathbf{A}^1_k, 0)$ dans $\mathrm{KExpVar}_k$. KVar_k et $\mathrm{KExpVar}_k$ sont naturellement munis de structures de $\mathbf{Z}[T]$-module grâce à l'unique morphisme d'anneaux qui envoie T sur $\mathbf{L}$. On définit alors l'anneau $\mathcal{M}_k$ (respectivement $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$) comme la localisation de KVar_k (respectivement $\mathrm{KExpVar}_k$) par rapport au sous-ensemble multiplicatif engendré par $\mathbf{L}$ et par les éléments $\mathbf{L}^n - 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

On dispose d'un morphisme d'anneaux naturel $\mathrm{KVar}_k \longrightarrow \mathrm{KExpVar}_k$ qui à $[X]$ associe la classe $[X, 0]$, et du morphisme d'anneaux $\mathcal{M}_k \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ qui en résulte par localisation. Le lemme suivant nous permet de nous assurer que les anneaux $\mathrm{KExpVar}_k$ et $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ avec lesquels nous allons travailler contiennent bien KVar_k et $\mathcal{M}_k$.

Lemme 2.1 *Les deux morphismes d'anneaux* $\mathrm{KVar}_k \longrightarrow \mathrm{KExpVar}_k$ *et* $\mathcal{M}_k \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ *sont injectifs.*

Démonstration. Il suffit de prouver l'injectivité du premier morphisme, que nous appellerons i. Pour cela, appelons pour $t \in \mathbf{A}^1(k)$, $j_t : \mathbf{Z}[\mathrm{ExpVar}_k] \longrightarrow \mathrm{KVar}_k$ l'application qui à (X, f) associe la classe de $[f^{-1}(t)]$. Vérifions qu'alors $j_0 - j_1$ définit un morphisme de groupes

$$j : \mathrm{KExpVar}_k \longrightarrow \mathrm{KVar}_k.$$

En effet, j_t préserve les relations (10) et (11). D'autre part, pour toute k-variété Y, nous avons $j_t([Y \times_k \mathbf{A}^1_k, \mathrm{pr}_2] = [Y]$, donc $j_0 - j_1$ préserve également (12). Ainsi, j est bien définie. De plus, pour toute k-variété X,

$$j \circ i([X]) = j([X, 0]) = j_0([X, 0]) = [X],$$

donc j est une section de i, ce qui prouve l'injectivité de i. $\square$

2.3 Anneaux de Grothendieck relatifs

Comme souvent en géométrie algébrique, il est utile de travailler dans un cadre relatif. Soit S une k-variété. Les définitions ci-dessus s'adaptent sans peine en remplaçant k par S pour donner des anneaux KVar_S et $\mathrm{KExpVar}_S$. L'anneau $\mathrm{KExpVar}_S$ par exemple est engendré par des éléments de la forme $[X, f]$ où X est une S-variété et $f : X \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$ un k-morphisme.

L'élément neutre est $[S,0]$ et $\mathbf{L}$ correspond à $[\mathbf{A}^1_S,0]$. La localisation se fait sans peine pour définir des anneaux $\mathscr{M}_S$ et $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_S$. On peut aussi faire varier S : soit $u : S \longrightarrow T$ un morphisme de k-variétés. À travers u, nous pouvons voir toute S-variété X comme une T-variété, ce qui induit un morphisme de groupes

$$u_* : \mathrm{KExpVar}_S \longrightarrow \mathrm{KExpVar}_T. \tag{14}$$

Remarquons que ce n'est pas un morphisme d'anneaux : l'élément neutre $[S,0]$ de $\mathrm{KExpVar}_S$ est envoyé sur l'élément $[S,0]$ de $\mathrm{KExpVar}_T$ qui n'a a priori rien à voir avec l'élément neutre $[T,0]$ de $\mathrm{KExpVar}_T$. D'autre part, nous pouvons également définir un morphisme de groupes :

$$u^* : \mathrm{KExpVar}_T \longrightarrow \mathrm{KExpVar}_S, \tag{15}$$

tel que l'élément $[X,f]$ soit envoyé sur $[X \times_T S, f \circ \mathrm{pr}_1]$. On vérifie sans peine grâce aux propriétés élémentaires du produit de variétés que c'est en fait un morphisme d'anneaux. En particulier, il envoie bien l'élément neutre $[T,0]$ sur $[T \times_S S, 0] = [S,0]$. Remarquons d'ailleurs que $\mathbf{L} = [\mathbf{A}^1_T,0]$ a pour image l'élément $\mathbf{L}$ de $\mathrm{KExpVar}_S$, alors que la morphisme u_* ne bénéficiait pas non plus de cette compatibilité.

Le point de vue relatif permet de voir une fonction « motivique » $\varphi : S \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ elle-même comme un élément d'un anneau d'exponentielles, à savoir $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_S$. Pour chaque $s \in S$, le morphisme $\mathrm{Spec}k(s) \longrightarrow S$ nous permet de définir $\varphi(s)$ comme l'image de φ dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_{k(s)}$. Le lemme suivant nous assure qu'une fonction motivique est entièrement déterminée par ses valeurs.

Lemme 2.2 *Soit $\varphi \in \mathrm{KExpVar}_S$. Si $\varphi(s) = 0$ pour tout $s \in S$, alors $\varphi = 0$ dans $\mathrm{KExpVar}_S$.*

Démonstration. Supposons $\mathcal{A} = \{\text{fermés } T \text{ de } S \text{ tels que } \varphi \neq 0 \text{ dans } \mathrm{KExpVar}_T\}$ non-vide. Soit T un élément de $\mathcal{A}$, de dimension minimale (nécessairement strictement positive). Nous pouvons alors grâce à l'axiome de découpage (11) choisir une composante irréductible T_0 de T appartenant à $\mathcal{A}$. Soit Φ un représentant de φ dans le groupe abélien libre $\mathbf{Z}[\mathrm{ExpVar}_{T_0}]$ engendré par les paires (X,f) où X est une T_0-variété et $f : X \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$ un k-morphisme, et soit t_0 le point générique de T_0. Puisque $\varphi(t_0) = 0$, la fibre Φ_{t_0} est une combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire de relations élémentaires définissant $\mathrm{KExpVar}_{k(t_0)}$. Ainsi, il existe un ouvert dense U de T_0 tel que l'image Φ_U de Φ dans $\mathbf{Z}[\mathrm{ExpVar}_U]$ soit somme de relations élémentaires. En posant $T_1 = T_0 - U$, nous avons, en regardant les classes correspondantes dans $\mathrm{KExpVar}_{T_0}$, $\Phi_{T_1} = \Phi_{T_0} - \Phi_U$, donc T_1 est un élément de $\mathcal{A}$ de dimension strictement inférieure à celle de T_0, contradiction. □

2.4 Sommes exponentielles

Dans le cas où k est un corps fini, la classe de (X,f) dans $\mathrm{KExpVar}_k$ ou bien $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ peut se voir comme un analogue de la somme d'exponentielles

$$\sum_{x \in X(k)} \psi(f(x)).$$

Dans l'optique de la théorie de l'intégration que nous voulons définir, cela motive la notation $[X,f] = \sum_{x\in X} \psi(f(x))$. Ceci est bien sûr seulement une notation. Ainsi, $[X,0]$ s'écrira $\sum_{x\in X} 1$: la classe d'une variété X correspond à une "somme" d'un point sur tous ses points.

Soit plus généralement une fonction motivique $\varphi \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_S$ sur une k-variété S. Nous pouvons la voir comme la somme de ses valeurs aux points de S :

$$\varphi = \sum_{s \in S} \varphi(s),$$

c'est-à-dire que la S-variété sous-jacente est « somme de ses fibres » au-dessus de S. Si S est munie d'une exponentielle $u : S \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$, nous pouvons étendre cette notation en définissant

$$\sum_{s \in S} \varphi(s)\psi(u(s)) = \varphi \cdot [S, u]$$

où le produit est vu dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_S$. Explicitement, dans le cas où $\varphi = [X, f]$ où X est une S-variété via $g : X \longrightarrow S$, on a par définition du produit dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_S$,

$$\sum_{s \in S} \varphi(s)\psi(u(s)) = [X, f][S, u] = [X \times_S S, f \circ \mathrm{pr}_1 + u \circ \mathrm{pr}_2] = [X, f + u \circ g],$$

pr_1 fournissant un isomorphisme entre $X \times_S S$ et X à travers lequel pr_2 devient g.
La notation que nous avons introduite n'a d'intérêt que si elle éclaire réellement les calculs. Étudions donc un peu comment on peut calculer directement avec les sommes d'exponentielles :

1. **Découpage :** Par définition de l'anneau des exponentielles, nous pouvons écrire

   $$\sum_{s \in S} \varphi(s)\psi(u(s)) = \sum_{s \in U} \varphi(s)\psi(u(s)) + \sum_{s \in Z} \varphi(s)\psi(u(s))$$

   où U est un ouvert de S et $Z = S \backslash U$ fermé.

2. **Calcul direct si la somme est finie :** Supposons que φ est nulle sauf en un nombre fini de points fermés $s_1, \dots s_m$. Alors les sommes d'exponentielles correspondantes ont un nombre fini de termes correspondant exactement aux valeurs non nulles de φ. En effet, si on note $U = S \backslash \{s_1, \dots, s_m\}$, alors la classe de φ dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_U$ est nulle, $\varphi = \sum_{i=1}^m [\{s_i\}, f]$ et notre somme d'exponentielles devient « finie » :

   $$\sum_{s \in S} \varphi(s)\psi(u(s)) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(s_i)\psi(u(s_i)),$$

   et prend un véritable sens si on identifie $\varphi(s_i)\psi(u(s_i))$ à $[\{s_i\}, f]$ pour tout i.

3. **Séparation de sommes** : Soit T une k-variété, avec $v : T \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$, et $\varphi' \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_T$. Alors

   $$\begin{aligned} \sum_{(s,t) \in S \times T} \varphi(s)\varphi'(t)\psi(u(s) + v(t)) &= \varphi\varphi'[S \times T, u + v] \\ &= \varphi[S, u]\varphi'[T, v] \\ &= \left(\sum_{s \in S} \varphi(s)\psi(u(s)) \right) \left(\sum_{t \in T} \varphi'(t)\psi(v(t)) \right). \end{aligned}$$

   En particulier, cela implique

   a. en prenant $T = \mathrm{Spec}\ k$ et $v = 0$, que les sommes d'exponentielles sont $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$-linéaires.

b. en prenant $T = \text{Spec } k$, $\varphi = 1$ et $v = t$ pour un certain $t \in \mathbf{A}^1_k$,

$$\sum_{s\in S} \varphi(s)\psi(u(s)+t) = \psi(t)\sum_{s\in S}\varphi(s)\psi(u(s)).$$

4. **Changement de variable** : Soit T une k-variété. Si $h : T \longrightarrow S$ est un isomorphisme,

$$\sum_{s\in S}\varphi(s)\psi(u(s)) = \varphi[S,u] = \varphi\circ h[T, u\circ h] = \sum_{t\in T}\varphi(h(t))\psi(u(h(t))).$$

A la lumière de cette notation, nous allons démontrer le résultat suivant :

Lemme 2.3 *Soit X une k-variété munie d'une action du groupe additif $\mathbf{G}_a$, et $f : X \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$ un morphisme $\mathbf{G}_a$-invariant, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$ et pour tout $t \in \mathbf{G}_a$,*

$$f(t\cdot x) = f(x) + t.$$

Alors la classe de (X, f) dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ est nulle.

Démonstration. Soit $t \in \mathbf{A}^1_k$. Puisque t induit un isomorphisme (noté additivement) de X, le changement de variable donne

$$[X,f] = \sum_{x\in X}\psi(f(x)) = \sum_{x+t\in X}\psi(f(x+t)).$$

Grâce à la $\mathbf{G}_a$-équivariance de f,

$$\sum_{x+t\in X}\psi(f(x+t)) = \sum_{x+t\in X}\psi(f(x)+t),$$

d'où en appliquant le changement de variable à l'isomophisme $-t$ et en mettant $\psi(t)$ en facteur,

$$[X,f] = \psi(t)\sum_{x\in X}\psi(f(x)) = \psi(t)[X,f].$$

Si on pouvait choisir, de même que dans le cadre classique, t tel que $\psi(t)$ inversible dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$, on aurait fini. Bien que cela n'a a priori aucune raison d'être, nous pourrions le forcer en inversant par exemple $(\psi(1)-1)$ dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$, ce qui ne mange pas de pain. Une autre manière de s'en sortir, présente dans [6], est la suivante : on somme sur tous les points $t \in \mathbf{A}^1_k$ pour obtenir grâce au lemme 2.2,

$$\left(\sum_{t\in\mathbf{A}^1_k} 1 - \sum_{t\in\mathbf{A}^1_k}\psi(t)\right)[X,f] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\mathbf{L} - [\mathbf{A}^1_k, \text{Id}]\right)[X,f] = 0.$$

Or d'après (12), $[\mathbf{A}^1_k, \text{Id}] = 0$, d'où le résultat, $\mathbf{L}$ étant inversible dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$. □

Ainsi, grâce aux règles de calcul que nous avons établies, nous avons pu prouver ce résultat essentiellement de la même manière que le résultat analogue pour de vraies sommes d'exponentielles sur les corps finis. Citons le cas particulier suivant :

Lemme 2.4 *Soit V un k-espace vectoriel et f une forme linéaire sur V. Alors*

$$\sum_{x\in V}\psi(r(f(x))) = \begin{cases} \mathbf{L}^{\dim V} & si\ f=0 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. Le côté gauche est, par définition, la classe de (V,f) dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$. Si $f=0$, cela vaut $[\mathbf{A}^1_k,0]^{\dim V}=\mathbf{L}^{\dim V}$. Sinon, soit a tel que $f(a)=1$. La G_a-action sur V donnée par $(t,v)\mapsto v+ta$ est invariante, et donc d'après le lemme 2.3, nous avons $[V,f]=0$. $\square$

3 Formule de Poisson motivique

3.1 Interlude : Rudiments d'intégration p-adique

Soit F un corps local muni d'une valuation ord, $\mathcal{O}_F$ son anneau des entiers, ϖ une uniformisante, $k=\mathcal{O}_F/\varpi\mathcal{O}_F$ son corps résiduel. Supposons que k est un corps fini avec $q=p^e$ éléments pour un certain nombre premier p. On munit F d'une norme en posant $|x|=q^{-\mathrm{ord}(x)}$ pour $x\in F$. Comme dans le paragraphe sur le cas local de la thèse de Tate, F (et plus généralement F^n pour tout entier $n\geq 1$) est localement compact, muni d'une unique mesure de Haar à constante multiplicative près. Comme dans ce paragraphe nous nous préoccupons peu de savoir si notre mesure est autoduale ou non, choisissons simplement sur F^n la mesure μ_n qui donne à $\mathcal{O}_F^n$ un volume 1. L'invariance par translation et le fait que $\mathcal{O}_F/\varpi^m\mathcal{O}_F$ soit fini de cardinal q^m nous donne alors le volume de toutes les boules :

$$\mu_n(a+\varpi^m\mathcal{O}_F^n)=q^{-mn}.$$

Soit A une partie mesurable de K^n et $f:A\longrightarrow K$ une fonction. Observons qu'alors $|f|$ prend ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $q^{\mathbf{Z}}$: $|f(x)|=q^{-m}$ si $\mathrm{ord}f(x)=m$. Supposons que f est telle que $\{\mathrm{ord}(f)=m\}\subset A$ soit mesurable pour tout m. Nous pouvons alors écrire

$$\int_A |f|\mu_n = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\mu_n(\{\mathrm{ord}(f)=m\})q^{-m}, \tag{16}$$

dès que la série $\sum_{m\in\mathbf{Z}}\mu_n(\{\mathrm{ord}(f)=m\})q^{-m}$ converge. Supposons en particulier, afin de s'affranchir de tout souci de convergence, que $|f|$ est une fonction de Schwarz-Bruhat, c'est-à-dire une fonction localement constante, à support compact. Alors il existe un entier $M\in\mathbf{Z}$ tel que $f=0$ en dehors de $\varpi^M\mathcal{O}_F^n$. Par compacité, nous pouvons également choisir un entier $N\geq M$ et que $|f|$ soit constante sur $a+\varpi^N\mathcal{O}_F^n$ pour tout $a\in F$. Les $a+\varpi^N\mathcal{O}_F^n$ avec a parcourant un système de représentants de $\varpi^M\mathcal{O}_F^n$ modulo $\varpi^N\mathcal{O}_F^n$ recouvrent $\varpi^M\mathcal{O}_F^n$ et sont en nombre fini. Ainsi, la somme intervenant dans (16) est finie et vaut

$$\sum_{a\in\varpi^M\mathcal{O}_F^n/\varpi^N\mathcal{O}_F^n}|f(a)|\mu_n(a+\varpi^N\mathcal{O}_F^n)=q^{-Nn}\sum_{a\in\varpi^M\mathcal{O}_F^n/\varpi^N\mathcal{O}_F^n}|f(a_i)|. \tag{17}$$

L'idée de l'intégration motivique est d'essayer d'adapter cela dans le cas où le corps résiduel n'est pas fini, et où F n'est donc pas localement compact, par exemple $F=k((t))$ avec k algébriquement clos. La somme (17) n'aura plus de sens dans ce cadre, et nous allons remplacer le nombre q par un symbole $\mathbf{L}$: cela désigne la droite affine $\mathbf{A}^1_k$ à laquelle nous pouvons identifier k afin d'adopter un langage plus géométrique. La mesure de $a+t^m\mathcal{O}_F^n$ pour tout a sera alors $\mathbf{L}^{-mn}$. Nous voyons donc que la mesure que nous allons obtenir ne sera plus une mesure réelle. Elle prendra ses valeurs dans la localisation $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ de l'anneau de Grothendieck des variétés, dans lequel $\mathbf{L}$, la classe de $\mathbf{A}^1_k$, est inversible. Nous pourrons par analogie transposer la notion de fonction de Schwarz-Bruhat et, grâce à la notation sous forme de somme d'exponentielles, contourner l'absence de compacité en adaptant directement la définition (17) pour l'intégrale d'une telle fonction, ce qui nous permettra ensuite de développer une théorie de Fourier sur les corps de fonctions sur un corps infini.

3.2 Transformée de Fourier motivique locale

Soit F le corps des fractions d'un anneau complet pour une valuation discrète ord, et soit k son corps résiduel, algébriquement clos, que l'on suppose de même caractéristique que F, de sorte que, $F = k((t))$ pour une uniformisante $t \in F$. On note $\mathcal{O}_F = \{x \in F,\ \mathrm{ord}(x) \geq 0\}$. On définit également une valeur absolue sur F en posant pour tout $x \in F$, $|x| = \alpha^{-\mathrm{ord}(x)}$ où $\alpha \in]0,1[$ est arbitraire.

3.2.1 Fonctions de Schwarz-Bruhat motiviques

Rappelons que dans la théorie classique, une fonction de Schwarz-Bruhat sur un corps local non-archimédien est une fonction à support compact, localement constante. Soient $M \leq N$ des entiers. On définit une fonction de Schwarz-Bruhat motivique de niveau (M,N) comme une fonction sur

$$t^M\mathcal{O}_F/t^N\mathcal{O}_F = \{x \in F,\ \mathrm{ord}(x) \geq M\}/\{x \in F,\ \mathrm{ord}(x) \geq N\},$$

à valeurs dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$. Elle correspond alors, par analogie avec le cas arithmétique, à une fonction sur F constante sur $t^N\mathcal{O}_F$ (et plus généralement sur les boules de rayon $|t|^N$) et à support inclus dans $t^M\mathcal{O}_F$. Pour l'usage que nous allons en faire, il est cependant commode de pouvoir voir une telle fonction elle-même comme élément d'un $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_S$ pour une certaine variété S. Dans ce but, nous allons identifier $t^M\mathcal{O}_F/t^N\mathcal{O}_F$ avec $\mathbf{A}_k^{(M,N)} := \mathbf{A}_k^{N-M}$ via

$$\begin{array}{ccc} t^M\mathcal{O}_F/t^N\mathcal{O}_F & \longrightarrow & \mathbf{A}_k^{(M,N)} \\ \displaystyle\sum_{i=M}^{N-1} x_i t^i \pmod{t^N} & \mapsto & (x_M,\ldots,x_{N-1}). \end{array} \tag{18}$$

Ainsi, nous pouvons voir une fonction de Schwarz-Bruhat motivique de niveau (M,N) comme une fonction $\mathbf{A}_k^{(M,N)} \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$, c'est-à-dire comme un élément de $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_{\mathbf{A}_k^{(M,N)}}$. Ces fonctions forment un anneau, que nous noterons $\mathscr{S}(F;M,N)$. Afin de définir l'anneau total de toutes les fonctions de Schwarz-Bruhat, il faut examiner ce qui se passe quand on fait varier M ou N. Intuitivement, nous aimerions identifier une fonction de niveau (M,N) avec toutes les fonctions de niveau (M',N) pour $M' < M$ obtenues en « l'étendant par 0 » et toutes les fonctions de niveau (M,N') avec $N' > N$ obtenues en la considérant comme une fonction sur les classes modulo $t^{N'}$, constante sur les classes modulo t^N.

1. **Variation de** M : Nous avons une injection naturelle $t^M\mathcal{O}_F/t^N\mathcal{O}_F \longrightarrow t^{M-1}\mathcal{O}_F/t^NO_F$, qui via (18) correspond à l'immersion fermée

$$\begin{array}{cccc} \iota : & \mathbf{A}_k^{(M,N)} & \longrightarrow & \mathbf{A}_k^{(M-1,N)} \\ & (x_M,\ldots,x_{N-1}) & \mapsto & (0,x_M,\ldots,x_{N-1}) \end{array}$$

La composition avec ι fournit donc un morphisme de restriction

$$\iota^* : \mathscr{S}(F; M-1, N) \longrightarrow \mathscr{S}(F; M, N).$$

Comme nous cherchons les morphismes de compatibilité pour former une limite inductive, ce qui nous intéresse est plutôt sa section, le morphisme (injectif) d'extension par zéro

$$\iota_* : \mathscr{S}(F; M, N) \longrightarrow \mathscr{S}(F; M-1, N)$$

qui envoie simplement un élément de $\mathscr{S}(F; M, N) = \mathscr{E}xp\mathscr{M}_{\mathbf{A}_k^{(M,N)}}$ sur sa classe dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_{\mathbf{A}_k^{(M-1,N)}}$, comme dans (14).

2. **Variation de** N : La surjection naturelle $t^M\mathcal{O}_F/t^{N+1}\mathcal{O}_F \longrightarrow t^M\mathcal{O}_F/t^N\mathcal{O}_F$ (réduction modulo t^N) correspond via (18) à

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \mathbf{A}_k^{(M,N+1)} & \longrightarrow & \mathbf{A}_k^{(M,N)} \\ & (x_M, \dots, x_N) & \mapsto & (x_M, \dots, x_{N-1}) \end{array}$$

qui est une fibration triviale de fibre $\mathbf{A}_k^1$. La composition avec π donne lieu à un morphisme injectif

$$\pi^* : \mathscr{S}(F; M, N) \longrightarrow \mathscr{S}(F; M, N+1)$$

qui comme dans (15) envoie un générateur $\varphi = [X, f]$ sur

$$[X \times_{\mathbf{A}_k^{(M,N)}} \mathbf{A}_k^{(M,N+1)}, f \circ \mathrm{pr}_1].$$

Si on voit cet élément de nouveau comme un élément de $\mathscr{S}(F; M, N)$, on obtient $[X, f]\mathbf{L}$. Moralement, π^* est donc une multiplication par $\mathbf{L}$, qui correspond à la taille des fibres.

Suite aux observations précédentes, les $(\mathscr{S}(F; M, N))_{(M,N)}$ forment un système inductif grâce aux fonctions ι_* et π^*, et nous pouvons définir l'espace des fonctions de Schwarz-Bruhat

$$\mathscr{S}(F) = \varinjlim_{M, \iota_*} \varinjlim_{N, \pi^*} \mathscr{S}(F; M, N).$$

Fonctions de Schwarz-Bruhat à plusieurs variables Nous pouvons également définir des fonctions de Schwarz-Bruhat à plusieurs variables : soit $n \geq 1$ un entier. Alors pour tout couple d'entiers (M, N), on définit

$$\mathscr{S}(F^n; M, N) = \mathscr{E}xp\mathscr{M}_{\left(\mathbf{A}_k^{(M,N)}\right)^n},$$

et on passe de même à la limite inductive pour obtenir $\mathscr{S}(F^n)$. Plus généralement, si nous nous donnons un entier n, une famille finie $(F_s)_{s \in S}$ de corps locaux ainsi que des entiers $M_s \leq N_s$ pour tout s, nous pouvons définir les fonctions de Schwarz-Bruhat sur le produit $\prod_{s \in S} F_s^n$ en écrivant

$$\mathscr{S}\left(\prod_{s \in S} F_s^n; (M_s, N_s)_s\right) = \mathscr{E}xp\mathscr{M}_{\left(\prod_{s \in S} \mathbf{A}_k^{(M_s, N_s)}\right)^n}$$

et en définissant $\mathscr{S}((\prod_{s \in S} F_s)^n)$ par limite inductive à partir de ces derniers.

3.2.2 Intégration

Soit $\varphi \in \mathscr{S}(F; M, N)$ une fonction de Schwarz-Bruhat de niveau (M, N). En vue de (17), on définit son intégrale par la formule

$$\int_F \varphi(x)\mathrm{d}x = \mathbf{L}^{-N} \sum_{x \in \mathbf{A}_k^{(M,N)}} \varphi(x),$$

où la somme dans le terme de droite est un élément de $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$, noté sous forme de somme d'exponentielles. Tout d'abord, il faut bien entendu vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de M et N. Si on regarde la définition de $\iota_* : \mathscr{S}(F; M, N) \longrightarrow \mathscr{S}(F; M-1, N)$ plus haut, cette application commute clairement avec la notation en somme d'exponentielles : cela correspond au fait intuitif que l'ajout dans la sommation de points où la fonction vaut zéro ne change pas la somme. Ainsi, remplacer M par $M-1$ n'affecte pas la somme. Pour ce qui est de N, la définition de $\pi^* : \mathscr{S}(F; M, N) \longrightarrow \mathscr{S}(F; M, N+1)$ plus haut montre que

$$\mathbf{L}^{-N-1} \sum_{x \in \mathbf{A}_k^{(M,N+1)}} \pi^*\varphi(x) = \mathbf{L}^{-N-1}\pi^*\varphi = \mathbf{L}^{-N-1}\mathbf{L}\varphi = \mathbf{L}^{-N}\varphi = \mathbf{L}^{-N} \sum_{x \in \mathbf{A}_k^{(M,N)}} \varphi(x).$$

Intuitivement, choisir $N+1$ plutôt que N revient à découper en boules plus petites sur lesquelles φ est localement constante. Cela donne $\mathbf{L}$ fois plus de boules, mais elles sont $\mathbf{L}$ fois plus petites (leur « mesure » est $\mathbf{L}^{-N-1}$ et non plus $\mathbf{L}^{-N}$), donc la somme reste inchangée. L'intégrale définit donc une application $\mathscr{S}(F) \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$, qui est clairement un morphisme de groupes.

Dans le cas arithmétique, nous avions commencé par définir une mesure sur F, et la définition de l'intégrale en découlait naturellement. Ceci était possible grâce à la théorie des mesures de Haar. Ici nous ne sommes plus dans ce cadre : F n'est pas nécessairement localement compact et la « mesure »qui est derrière cette intégrale est à valeurs dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$. Etant définie comme une somme d'exponentielles, l'intégrale motivique est soumise à toutes les règles de calcul listées plus haut.

3.2.3 Transformée de Fourier locale

Nous sommes presque prêts à définir la transformée de Fourier d'une fonction de Schwarz-Bruhat. Par analogie avec l'application Λ du cas arithmétique, il nous faut encore un « noyau » de Fourier $r : F \longrightarrow k$, que nous composerons avec un caractère $\psi : k \longrightarrow \mathbf{C}^*$. Pour que la transformée de Fourier soit bien définie et ait de bonnes propriétés, il faut qu'elle soit linéaire et qu'il existe un ν tel que r soit nulle sur $t^\nu \mathcal{O}_F$. Choisissons un tel ν minimal, appelé conducteur de r. Alors r définit une fonction sur $\mathbf{A}_k^{(M,N)}$ dès que $N \geq \nu$. Dans le cas qui nous importe le plus où F est le complété en un point fermé du corps de fonction d'une courbe projective lisse sur k, r sera donné par une application résidu : soit $\omega \in \Omega_{F/k}$ une forme méromorphe non-nulle. On posera $r(x) = \mathrm{res}(x\omega)$ où $\mathrm{res} : \Omega_{F/k} \longrightarrow k$ est l'application résidu. Dans ce cas $\nu = -\mathrm{ord}(\omega)$.

Dans la définition de la transformée de Fourier, l'argument de r sera un produit de la forme xy, où x varie dans un $\mathbf{A}_k^{(M,N)}$, domaine de définition de la fonction que l'on transforme et y dans un $\mathbf{A}_k^{(M',N')}$ à déterminer. Si on écrit

$$x = t^M x_M + \ldots + t^{N-1}x_{N-1} + t^N\mathcal{O}_F, \quad y = t^{M'}y_{M'} + \ldots + t^{N'-1}y_{N'-1} + t^{N'}\mathcal{O}_F$$

alors $xy = t^{M+M'}x_M y_{M'} + \ldots + t^{N+M'}\mathcal{O}_F + t^{M+N'}\mathcal{O}_F$, c'est-à-dire que xy est un élément de $\mathbf{A}_k^{(M+M',\min(N+M',M+N'))}$. Pour que $r(xy)$ soit bien défini, il faut et il suffit que

$$\min(N+M', M+N') \geq \nu. \tag{19}$$

Si M' et N' sont choisis de cette façon, pour tout $y \in \mathbf{A}_k^{(M',N')}$, $x \mapsto r(xy)$ définit une application $r_y : \mathbf{A}_k^{(M,N)} \longrightarrow \mathbf{A}_k^1$.

Transformée de Fourier. Pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(F; M, N)$, on définit

$$\mathscr{F}\varphi(y) = \int_F \varphi(x)\psi(r(xy))\mathrm{d}x$$

Si $y \in \mathbf{A}_k^{(M',N')}$ avec M', N' vérifiant la condition (19), $\mathscr{F}\varphi(y) \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$, et $\mathscr{F}\varphi$ définit donc une fonction de Schwarz-Bruhat de niveau (M', N'). Explicitons son écriture dans le cas où φ est de la forme $[X, f]$ avec X munie d'une structure de $\mathbf{A}_k^{(M,N)}$-variété via $u : X \longrightarrow \mathbf{A}_k^{(M,N)}$ et $f : X \longrightarrow \mathbf{A}_k^1$ un k-morphisme. Par définition,

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\varphi(y) &= \mathbf{L}^{-N} \sum_{x \in \mathbf{A}_k^{(M,N)}} \varphi(x)\psi(r(xy)) \\
&= \mathbf{L}^{-N}[X, f][\mathbf{A}_k^{(M,N)}, r_y] \\
&= \mathbf{L}^{-N}[X \times_{\mathbf{A}_k^{(M,N)}} \mathbf{A}_k^{(M,N)}, f \circ \mathrm{pr}_1 + r_y \circ \mathrm{pr}_2].
\end{aligned}$$

Regardons l'élément

$$\mathbf{L}^{-N}[X \times_{\mathbf{A}_k^{(M,N)}} \mathbf{A}_k^{(M,N)} \times_k \mathbf{A}_k^{(M',N')}, f \circ \mathrm{pr}_1 + r(\mathrm{pr}_2 \cdot \mathrm{pr}_3)] \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_{\mathbf{A}_k^{(M',N')}}.$$

Pour chaque $y \in \mathbf{A}_k^{(M',N')}$, la valeur en y de cette fonction motivique est exactement $\mathscr{F}\varphi(y)$, donc par le lemme 2.2,

$$\mathscr{F}\varphi = \mathbf{L}^{-N}[X \times_{\mathbf{A}_k^{(M,N)}} \mathbf{A}_k^{(M,N)} \times_k \mathbf{A}_k^{(M',N')}, f \circ \mathrm{pr}_1 + r(\mathrm{pr}_2 \cdot \mathrm{pr}_3)].$$

Dans la suite, nous choisirons $M' = \nu - N$ et $N' = \nu - M$ afin de maximiser le domaine de définition de $\mathscr{F}\varphi$. Nous avons donc défini une application

$$\mathscr{F} : \mathscr{S}(F; M, N) \longrightarrow \mathscr{S}(F; \nu - N, \nu - M).$$

Dans le cas arithmétique, nous avions normalisé notre mesure en fonction du conducteur du noyau de Fourier de sorte à ce que la formule d'inversion soit valide sans constante multiplicative supplémentaire. Puisque nous n'avons pas pu adopter la même approche ici, il est naturel qu'une constante multiplicative dépendant de ν apparaisse.

Théorème 3.1 *(Inversion de Fourier) Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(F; M, N)$ et pour tout $z \in \mathbf{A}_k^{(M,N)}$,*

$$\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi(z) = \mathbf{L}^{-\nu}\varphi(-z).$$

Démonstration. Par linéarité, nous pouvons supposer $\varphi = [X, f]$ comme ci-dessus. Pour plus de lisibilité, notons $(M', N') = (\nu - N, \nu - M)$ et $(M'', N'') = (M, N)$. Alors d'après le calcul ci-dessus, $\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi$ est représenté par

$$\mathbf{L}^{-N-N'}[X \times_{\mathbf{A}_k^{(M,N)}} \mathbf{A}_k^{(M,N)} \times \mathbf{A}_k^{(M',N')} \times \mathbf{A}_k^{(M'',N'')}, f \circ \mathrm{pr}_1 + r(\mathrm{pr}_2 \cdot \mathrm{pr}_3) + r(\mathrm{pr}_3 \cdot \mathrm{pr}_4)]$$

où on a utilisé la $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$-linéarité de $\mathscr{F}$ pour sortir le facteur $\mathbf{L}^{-N}$ de $\mathscr{F}\varphi$. Nous avons donc à faire au morphisme

$$\begin{array}{rcl} g : X \times_{\mathbf{A}_k^{(M,N)}} \mathbf{A}_k^{(M,N)} \times \mathbf{A}_k^{(M',N')} \times \mathbf{A}_k^{(M'',N'')} & \longrightarrow & \mathbf{A}_k^1 \\ (a, x, y, z) & \mapsto & f(a) + r((x+z)y) \end{array}$$

Notons W son domaine de définition ci-dessus et $W' \subset W$ l'ouvert d'équation $x + z \neq 0$. Dans W', $x \in t^M\mathcal{O}_F/t^N\mathcal{O}_F$ et $z \in t^M\mathcal{O}_F/t^N\mathcal{O}_F$ sans que $x + z$ soit de classe nulle, donc $\mathrm{ord}(x + z) \in \{M, \dots, N - 1\}$. Prenons y d'ordre M' : alors

$$\mathrm{ord}((x + z)y) = \mathrm{ord}(x + z) + \mathrm{ord}(y) \leq N - 1 + M' < \nu.$$

Par définition de ν, la forme k-linéaire $y \mapsto r((x+z)y)$ est non-triviale, et nous pouvons choisir $y_{x,z} \in \mathbf{A}_k^{(M',N')}$ tel que $r((x + z)y_{x,z}) = 1$. Considérons alors l'action de $\mathbf{G}_a$ sur W' donnée pour tout $t \in \mathbf{G}_a$ par

$$t : (u, x, y, z) \mapsto (u, x, y + ty_{x,z}, z),$$

pour laquelle g est clairement équivariante. D'après le lemme 2.2, on obtient $[W', g_{|W'}] = 0$, ce qui nous autorise à nous restreindre au fermé W'' d'équation $x + z = 0$. Si la structure de $\mathbf{A}_k^{(M,N)}$-variété de X est donnée par $u : X \longrightarrow \mathbf{A}_k^{(M,N)}$, alors $a \mapsto (a, u(a))$ définit un isomorphisme entre X et $X \times_{\mathbf{A}_k^{(M,N)}} \mathbf{A}_k^{(M,N)}$, donc W'' est paramétré par les quadruplets $(a, u(a), y, -u(a))$, et isomorphe à $X \times_{-u} \mathbf{A}_k^{(M'',N'')} \times \mathbf{A}_k^{(M',N')}$, l'indice $-u$ indiquant que le produit est pris en considérant X comme une $\mathbf{A}_k^{(M'',N'')}$-variété via $-u$ et non u. Nous obtenons donc finalement

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F}\mathscr{F}\varphi & = & \mathbf{L}^{-N-N'}[X \times_{-u} \mathbf{A}_k^{(M'',N'')} \times \mathbf{A}_k^{(M',N')}, f] \\ & = & \mathbf{L}^{-N-N'+N'-M'}[X \times_{-u} \mathbf{A}_k^{(M'',N'')}, f] \\ & = & \mathbf{L}^{-\nu}\varphi \circ \mathrm{inv} \end{array}$$

où $\mathrm{inv} : \mathbf{A}_k^{(M'',N'')} \longrightarrow \mathbf{A}_k^{(M,N)}$ est l'application $x \mapsto -x$. □

Pour conclure cette section, calculons la transformée de Fourier d'une fonction simple, c'est-à-dire d'une fonction caractéristique d'une boule.

Lemme 3.1 *Soient $a \in F$, M tel que $a \in t^M\mathcal{O}_F$ et $N \geq M$. Soit $\varphi = \mathbf{1}_{a+t^N\mathcal{O}_F} \in \mathbf{A}_k^{(M,N)}$ la fonction caractéristique de la boule de centre a et de rayon $|t|^N$. Alors*

$$\mathscr{F}\varphi(y) = \mathbf{L}^{-N}\psi(r(ay))\mathbf{1}_{t^{\nu-N}\mathcal{O}_F}.$$

Démonstration. Utilisant les règles de calcul prouvées précédemment,

$$\begin{array}{rcl}\mathscr{F}\mathbf{1}_{a+t^N\mathcal{O}_F}(y) & = & \displaystyle\int_{a+t^N\mathcal{O}_F}\psi(r(xy))\mathrm{d}x\\ & = & \displaystyle\int_{t^N\mathcal{O}_F}\psi(r(ay))\psi(r(xy))\mathrm{d}x \quad \text{(changement de variable } x\mapsto x-a\text{)}\\ & = & \displaystyle\psi(r(ay))\int_{t^N\mathcal{O}_F}\psi(r(xy))\mathrm{d}x\\ & = & \begin{cases}\mathbf{L}^{-N}\psi(r(ay)) & \text{si } \mathrm{ord}(y)\geq \nu-N\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{array}$$

où la dernière étape vient du lemme 2.4. Notons d'ailleurs que la fonction obtenue est bien dans $\mathscr{S}(F;\nu-N,\nu-M)$: en effet, elle est bien définie sur $t^{\nu-N}\mathcal{O}_F$, et, puisque $a\in t^M\mathcal{O}_F$, $at^{\nu-M}\mathcal{O}_F\subset t^{\nu}\mathcal{O}_F$ et donc $\mathscr{F}\varphi(t^{\nu-M}\mathcal{O}_F)=\mathbf{L}^{-N}\psi(r(at^{\nu-M}\mathcal{O}_F))=0$, ce qui montre qu'on peut la voir comme une fonction sur les classes modulo $t^{\nu-M}\mathcal{O}_F$. □

3.3 Transformée de Fourier motivique : cas global

Soit C une courbe projective lisse connexe sur k, de corps de fonctions $F=k(C)$. Pour toute place $s\in C$, on note F_s le complété de F en s.

Fonctions de Schwarz-Bruhat globales Une fonction de Schwarz-Bruhat globale sur les adèles $\mathbf{A}_F$ (on dira souvent sur F par abus) est par définition un élément de $\mathscr{S}\left(\prod_{s\in S}F_s\right)$ pour un ensemble fini S de places de C. On peut étendre cette définition au cas où il y a plusieurs variables : une fonction de Schwarz-Bruhat à n variables est un élément de $\mathscr{S}\left(\prod_{s\in S}F_s^n\right)$ pour un ensemble fini de places S. Lorsque $S'\supset S$, nous identifions l'élément $\varphi\in\mathscr{S}\left(\prod_{s\in S}F_s^n\right)$ avec l'élément $\varphi\otimes\bigotimes_{s'\in S'\setminus S}\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{F'_s}}\in\mathscr{S}\left(\prod_{s\in S'}F_s^n\right)$.

Par un argument de compacité, une fonction de Schwarz-Bruhat φ_s classique sur un corps local non-archimédien F_s s'écrit toujours comme une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques de boules : il existe $a_1,\ldots,a_k\in F_s$ et des boules $B_1,\ldots,B_k$ centrées respectivement en $a_1,\ldots,a_k$ tels que

$$\varphi=\sum_{i=1}^k\varphi(a_i)\mathbf{1}_{B_i}.$$

Par conséquent, la partie non-archimédienne d'une fonction de Schwarz-Bruhat sur un corps global F s'écrit comme une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques de produits de boules. Dans le cas motivique, nous avons déjà vu que les sommes finies devenaient des sommes d'exponentielles sur des variétés : une fonction de Schwarz-Bruhat motivique sera donc la somme d'une famille de fonctions caractéristiques de produits de boules, paramétrée par une variété.

Précisons cela : pour toute famille finie $(M_s,N_s)_{s\in S}$ et tout

$$a=(a_s)_s\in W=\left(\prod_{s\in S}\mathbf{A}_k^{(M_s,N_s)}\right)^n,$$

on définit $W_a=\{a\}$ muni de sa structure naturelle de W-variété. La fonction associée à $[W_a\longrightarrow W,0]\in\mathscr{E}xp\mathscr{M}_W$ est une fonction de Schwarz-Bruhat globale représentant la fonction caractéristique du produit de boules de centres a_s et de rayons $|t|^{N_s}$. De telles fonctions seront appelées fonctions simples. Si Z est une sous-variété de W et $\iota : Z \longrightarrow W$ l'inclusion, on appelle famille de fonctions simples paramétrée par Z l'élément $\varphi = [Z \xrightarrow{\iota} W, 0] \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_W$. Pour tout z, on note φ_z l'élément $[W_z \longrightarrow W, 0]$.

Soit Φ une fonction de Schwarz-Bruhat globale sur $\mathbf{A}_F^n$, représentée par $[X, f]$ où X est une variété sur $W = \left(\prod_{s\in S} \mathbf{A}_k^{(M_s,N_s)}\right)^n$, et $f : X \longrightarrow \mathbf{A}_k^1$ un k-morphisme. Si on appelle φ la famille de fonctions simples paramétrée par $[W \xrightarrow{\mathrm{id}} W, 0] \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_W$, alors pour tous $x, w \in W$ distincts, $\varphi_w(x) = 0$, et $\varphi_x(x) = 1$, grâce à quoi le lemme 2.2 nous permet de dire que :

$$\Phi = \sum_{w\in W} \Phi(w)\varphi_w.$$

Ainsi, toute fonction de Schwarz-Bruhat globale Φ s'exprime à l'aide d'une famille de fonctions simples. Cette observation nous permettra de nous restreindre au cas des fonctions simples lors de la démonstration de la formule de Poisson.

Transformée de Fourier Fixons une forme différentielle méromorphe ω non-nulle sur C. Pour toute place $s \in C(k)$ on définit $r_s : F \longrightarrow \mathbf{C}$ par $r_s(x) = \mathrm{res}_s(x\omega)$, de conducteur $\nu_s = -\mathrm{ord}_s(\omega)$. Soit $K = -\sum_s \nu_s[s]$ le diviseur canonique correspondant. Soit une fonction de Schwarz-Bruhat $\varphi = \otimes_{s\in S}\varphi_s \in \mathscr{S}\left(\prod_{s\in S} F_s^n\right)$ avec S tel que $\nu_s = 0$ pour $s \notin S$. Nous savons que lorsque $\nu_s = 0$, $\mathscr{F}\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{F_s}} = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{F_s}}$. Cela nous permet de définir

$$\mathscr{F}\varphi = \mathscr{F}\varphi_S = \otimes_{s\in S}\mathscr{F}\varphi_s,$$

qui est alors également une fonction de Schwarz-Bruhat globale sur $\mathbf{A}_F^n$.

Théorème 3.2 *(Formule d'inversion de Fourier) Soit φ une fonction de Schwarz-Bruhat globale sur $\mathbf{A}_F^n$. Alors*

$$\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi(x) = \mathbf{L}^{n(2g-2)}\varphi(-x)$$

où g est le genre de C.

Démonstration. Soient φ et S comme ci-dessus. D'après la formule d'inversion locale

$$\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi(x) = \bigotimes_{s\in S} \mathbf{L}^{-n\nu_s}\varphi_s(-x_s) = \mathbf{L}^{n(2g-2)}\varphi(-x),$$

car $-\sum_s \nu_s = \deg K = 2g-2$. □

Sommation sur les points rationnels. La formule de Poisson classique du théorème 1.4 fait intervenir une sommation d'une fonction de Schwarz-Bruhat sur les points du corps F. Nous devons donc définir ce que serait la sommation sur F pour une fonction de Schwarz-Bruhat motivique : F n'ayant pas de structure de k-variété, une somme sur F n'est pas à proprement parler une somme d'exponentielles telle que nous les avons considérées plus haut. Cependant, F est tout de même la limite inductive des k-variétés (et même k-espaces vectoriels) $L(D)$ quand D parcourt l'ensemble des diviseurs sur la courbe C. Ce qui nous permettra de nous en sortir est le fait que toute fonction de Schwarz-Bruhat correspond en fait à une fonction nulle en dehors d'un certain $L(D)$, et sa somme sur F sera simplement sa somme sur $L(D)$.

Plus précisément, soit $\varphi : \prod_{s\in S} \mathbf{A}_k^{(M_s,N_s)} \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ une fonction de Schwarz-Bruhat. Pour le moment, elle est définie sur les classes modulo $t_s^{N_s}\mathcal{O}_{F_s}$ pour chaque s : il faut donc la « remonter » à F. Posons D le diviseur $-\sum_{s\in S} M_s[s]$. Alors nous avons une application naturelle

$$\alpha : L(D) \longrightarrow \prod_{s\in S} \left(t_s^{M_s}\mathcal{O}_{F_s}/t_s^{N_s}\mathcal{O}_{F_s}\right)$$

qui envoie $x = \prod_{s\in S} x_s$ sur l'élément $(\bar{x}_s)_{s\in S}$ tel que pour tout s, $\bar{x}_s$ est la classe de x_s modulo $t_s^{N_s}\mathcal{O}_{F_s}$. Nous obtenons donc à partir de φ une fonction motivique $\alpha^*\varphi : L(D) \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$, que nous pouvons voir comme une fonction sur F nulle en dehors de l'espace vectoriel $L(D)$, et nous pouvons définir

$$\sum_{x\in F} \varphi(x) := \sum_{x\in L(D)} \alpha^*\varphi(x),$$

c'est-à-dire que la somme de φ sur F est la classe de $\alpha^*\varphi$ dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$. Explicitement, si φ est de la forme $[X,f] \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_{\prod_{s\in S} \mathbf{A}_k^{(M_s,N_s)}}$, nous avons

$$\sum_{x\in F} \varphi(x) = \left[L(D) \times_{\prod_{s\in S} \mathbf{A}_k^{(M_s,N_s)}} X, f\circ \mathrm{pr}_2\right].$$

Il y a bien entendu quelques choses à vérifier : tout d'abord, cela ne dépend pas de l'ensemble S choisi, car agrandir S ne rajoute que des facteurs $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{F_s}}$ qui ne modifient ni D ni l'application α. Ensuite, cela ne dépend pas des M_s : un M_s plus petit change le diviseur D mais $\alpha^*\varphi$ sera nulle sur les points supplémentaires que cela ajoute à $L(D)$. Il n'y a pas non plus de dépendance en N_s car augmenter N_s ne modifie ni D, ni les valeurs prises par φ, et par conséquent cela conserve la fonction $\alpha^*\varphi$.

Cette construction se généralise également à une fonction $\varphi : \left(\prod_{s\in S} \mathbf{A}_k^{(M_s,N_s)}\right)^n \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ à n variables et permet de donner un sens à la grandeur $\sum_{x\in F^n} \varphi(x)$.

Formule de Poisson motivique. Nous arrivons au résultat principal de ce mémoire :

Théorème 3.3 *(Formule de Poisson motivique) Soit φ une fonction de Schwarz-Bruhat globale sur $\mathbf{A}_F^n$. Alors*

$$\sum_{x\in \mathbf{A}_F^n} \varphi(x) = \mathbf{L}^{(1-g)n} \sum_{y\in \mathbf{A}_F^n} \mathscr{F}\varphi(y).$$

Démonstration. Dans le cas arithmétique, nous disposions d'une démonstration directe de la formule de Poisson reposant sur la locale compacité des adèles de F, et nous pouvions par suite en déduire Riemann-Roch. Ici, au contraire, c'est le théorème de Riemann-Roch qui va nous servir pour établir la formule de Poisson. Le raisonnement que nous allons faire sera donc analogue au sens inverse de celui que nous avons fait pour montrer le théorème de Riemann-Roch à partir de la formule de Poisson arithmétique.

Par souci de simplicité, nous allons supposer $n = 1$. Nous pouvons en outre prendre pour φ une fonction simple, c'est-à-dire comme ci-dessus la fonction caractéristique d'un produit de boules de centres $a_s \in \mathbf{A}_k^{(M_s,N_s)}$ et de rayons $|t_s|^{N_s}$.
Exprimons d'abord le côté droit. Pour tout s, d'après le lemme 3.1,

$$\mathscr{F}\varphi_s(y_s) = \begin{cases} \mathbf{L}^{-N_s}\psi(\mathrm{res}_s(a_s y_s \omega)) & \text{si } \mathrm{ord}_s(y_s\omega) + N_s \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons alors $D = \sum_s N_s[s]$. En prenant le produit, $\mathscr{F}\varphi$ est une fonction de Schwarz-Bruhat globale sur $\prod_s F_s$ donnée par

$$\mathscr{F}\varphi(y) = \begin{cases} \mathbf{L}^{-\deg(D)}\psi\left(\sum_{s\in S}\mathrm{res}_s(a_s y_s \omega)\right) & \text{si } \mathrm{div}(y\omega) + D \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous y reconnaissons $\sum_{s\in S}\mathrm{res}_s(a_s y_s\omega) = \theta(y\omega)(a)$ où $\theta : \Omega_{F/k} \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, k)$ est l'isomorphisme du théorème 4.2. Lorsque y parcourt $L(\mathrm{div}(\omega) + D)$, $y\omega$ parcourt $\Omega(-D)$, et donc la forme linéaire $y \mapsto \theta(y\omega)(a)$ est nulle sur $L(\mathrm{div}(\omega) + D)$ si et seulement si $a \in \Omega(-D)^\perp = R(-D) + k(C)$. Ainsi, en appliquant le lemme 2.4 nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{y\in F}\mathscr{F}\varphi(y) &= \mathbf{L}^{-\deg(D)} \sum_{y\in L(\mathrm{div}(\omega)+D)} \psi(\theta(y\omega)(a)) \\ &= \begin{cases} \mathbf{L}^{-\deg(D)+\dim L(\mathrm{div}(\omega)+D)} & \text{si } a \in \Omega(-D)^\perp \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Distinguons suivant ces deux cas pour évaluer le côté gauche. Si

$$(a_s)_s \in \Omega(-D)^\perp = R(-D) + k(C),$$

il existe $a' \in k(C)$ tel que $a - a' \in R(-D)$, c'est-à-dire tel que $a' \in \prod_s(a_s + t^{N_s}\mathcal{O}_F)$. Ainsi cette condition est exactement équivalente à l'existence d'un point rationnel a' dans $\prod_s(a_s + t^{N_s}\mathcal{O}_F)$, et dans ce cas $\prod_s(a_s + t^{N_s}\mathcal{O}_F) = \prod_s(a'_s + t^{N_s}\mathcal{O}_F)$, et

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - a' \in L(D) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le côté gauche s'évalue alors simplement en

$$\sum_{x\in F}\varphi(x) = \sum_{x\in F}\varphi(x+a) = \sum_{x\in L(-D)} 1 = \mathbf{L}^{\dim L(-D)}.$$

Le théorème de Riemann-Roch permet donc de conclure dans le cas où $(a_s)_s \in \Omega(-D)$. Dans le cas contraire, nous avons vu qu'il n'y avait pas de point rationnel dans $\prod_s(a_s + t^{N_s}\mathcal{O}_F)$, ce qui implique que le côté gauche est nul, et termine la preuve. □

Faisons une petite vérification en testant la compatibilité entre la formule d'inversion $\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi(x) = \mathbf{L}^{(2g-2)n}\varphi(-x)$ et la formule de Poisson que nous venons de démontrer : nous obtenons

$$\sum_{x\in F^n}\mathscr{F}\varphi(y) = \mathbf{L}^{(1-g)n}\sum_{x\in F^n}\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi(x) = \mathbf{L}^{(1-g)n+(2g-2)n}\sum_{x\in F^n}\varphi(-x) = \mathbf{L}^{(g-1)n}\sum_{x\in F^n}\varphi(x),$$

comme prévu.

4 Annexe : Le théorème de Riemann-Roch pour les courbes

Pour la rédaction de cette section, nous avons suivi librement [11], en résumant ou sautant quelques preuves. Soit X une courbe projective lisse sur un corps algébriquement clos k.

4.1 Diviseurs et systèmes linéaires

Soit D un diviseur sur X. On définit le système linéaire associé à D comme

$$|D| = \{\text{diviseurs effectifs linéairement équivalents à } D\}.$$

C'est un espace projectif : Si on note

$$L(D) = \{0\} \cup \{f \in k(X) | \operatorname{div}(f) \geq -D\},$$

qui est un espace vectoriel sur k de dimension notée $l(D)$, alors $|D|$ est en bijection avec $P(L(D))$, l'espace projectif sur $L(D)$. La dimension du système linéaire $|D|$ est sa dimension en tant qu'espace projectif, à savoir $l(D) - 1$.

4.2 La théorème de Riemann-Roch, première forme

Sous la forme sous laquelle nous allons l'énoncer, le théorème de Riemann-Roch est simplement une formule qui permet de calculer la caractéristique d'Euler du faisceau $\mathcal{L}(D)$, sous-faisceau du faisceau constant $k(X)$. Notons $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions régulières sur X, $g = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ le genre de X.

Théorème 4.1 *(Riemann-Roch) Pour tout diviseur D sur X,*

$$\chi(\mathcal{L}(D)) = \deg D + 1 - g.$$

Autrement dit, en notant $i(D) = \dim H^1(X, \mathcal{L}(D))$,

$$l(D) - i(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

La preuve se fait par récurrence sur le degré : il suffit de vérifier que si on remplace D par $D+P$, on augmente la caractéristique d'Euler d'une unité. Or cela donne la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{L}(D+P) \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

où le faisceau quotient Q est un faisceau gratte-ciel concentré en P, et Q_P est un espace vectoriel de dimension 1, d'où $\chi(Q) = 1 - 0 = 1$. On conclut grâce à l'additivité de la caractéristique d'Euler dans les suites exactes courtes.

Remarque. En écrivant

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \dim \underbrace{H^0(X, \mathcal{O}_X)}_{\text{constantes}} - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 1 - g$$

le théorème de Riemann-Roch peut se voir comme une formule donnant la différence des caractéristiques d'Euler des faisceaux $\mathcal{L}(D)$ et $\mathcal{O}_X$:

$$\chi(\mathcal{L}(D)) - \chi(\mathcal{O}_X) = \deg D.$$

Ainsi la caractéristique d'Euler ne permet de distinguer $\mathcal{L}(D)$ et $\mathcal{O}_X$ que si D est de degré non nul.

4.3 Dualité de Serre

Grâce à des résultats de dualité, nous allons parvenir à ré-exprimer le terme $i(D)$ du théorème 4.1 de sorte à obtenir la forme usuelle du théorème de Riemann-Roch.

4.3.1 Classes d'adèles et leur dual

Notons R l'anneau des adèles de $k(X)$ et $R(D) = \{x \in R \text{ tels que } \operatorname{div}(x) \geq -D\}$, de sorte que $L(D) = R(D) \cap k(X)$. Nous allons admettre le résultat suivant qui exprime l'espace $I(D) = H^1(X, \mathcal{L}(D))$ comme un certain groupe de classes d'adèles.

Proposition 4.1 *Si D est un diviseur de X, on a un isomorphisme canonique*

$$H^1(X, \mathcal{L}(D)) \cong R/(R(D) + k(X)).$$

On note $J(D)$ le dual de $R/(R(D) + k(X))$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur R nulles sur $R(D)$ et $k(X)$. C'est un système inductif et on peut former $J = \varinjlim J(D)$, qui est muni d'une structure de $k(X)$-espace vectoriel : si D et D' sont des diviseurs, pour tout $\alpha \in J(D)$ et $f \in L(D')$, on définit $f\alpha : x \mapsto \alpha(fx)$, qui appartient à $J(D - D')$.

Proposition 4.2 *J est de dimension 1 sur $k(X)$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en prenant α et α' linéairement indépendantes sur $k(X)$, que l'on peut choisir dans un certain $J(D)$ avec D diviseur de degré d. Cela rend l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} L(D_n) \times L(D_n) & \longrightarrow & J(D - D_n) \\ (f, g) & \mapsto & f\alpha + g\alpha' \end{array}$$

injective pour tout diviseur D_n de degré n, ce qui en termes de dimensions donne l'inégalité

$$\dim J(D - D_n) \geq 2 \dim L(D_n).$$

Nous allons montrer que ceci est contradictoire pour n grand. En effet, $l(D - D_n)$ est nul si $n > \deg D$, et donc d'après la proposition 4.1 et la première forme du théorème de Riemann-Roch, le côté gauche s'écrit

$$\dim J(D - D_n) = i(D - D_n) = -\deg(D - D_n) + g - 1 = n + (g - 1 - d).$$

Or, encore par le théorème de Riemann-Roch, le côté droit vaut $2l(D_n) \geq 2(n + 1 - g)$, et croît donc plus vite que le côté gauche, contradiction. □

4.3.2 Théorème de dualité

Dans le paragraphe précédent nous avons introduit le dual $J(D)$ de $R/(R(D) + k(X))$ et la limite inductive $J = \varinjlim J(D)$, dont nous avons montré que c'était un $k(X)-$espace vectoriel de dimension au plus 1. À présent, nous allons identifier J à l'espace des différentielles méromorphes sur X, $D_k(X)$, qui est un $k(X)-$espace vectoriel de dimension 1. Cela va être fait grâce à la notion de résidu : pour toute forme méromorphe ω sur X et tout point $P \in X$, on peut écrire $\omega = f\mathrm{d}t$ au voisinage de P, et le résidu de ω en P, noté $\operatorname{res}_P(\omega)$, sera le coefficient du terme de degré -1 dans le développement de Laurent de f au voisinage de P.

On peut montrer que cela ne dépend pas du choix de l'uniformisante t, et qu'on a la formule des résidus :

$$\sum_{P\in X} \operatorname{res}_P(\omega) = 0.$$

On définit alors pour tout $\omega \in D_k(X)$ une forme linéaire $\theta(\omega)$ sur les adèles R donnée par

$$\theta(\omega) : x \mapsto \sum_{P\in X} \operatorname{res}_P(x_P\omega).$$

Elle est triviale sur $k(X)$ d'après la formule des résidus, et k-linéaire. De plus, si $\operatorname{div}\omega \geq D$, c'est-à-dire si ω appartient à

$$\Omega(D) = \{\omega \in D_k(X),\ \operatorname{div}\omega \geq D\},$$

alors $\theta(\omega)$ est également triviale sur $R(D)$. Ainsi, θ définit une application $k(X)$-linéaire de $D_k(X)$ dans J (J étant munie de la structure de $k(X)$-espace vectoriel décrite ci-dessus), qui, pour tout diviseur D, se restreint en une application k-linéaire de $\Omega(D)$ dans $J(D)$.

Théorème 4.2 *Pour tout diviseur D, l'application $\theta : \Omega(D) \longrightarrow J(D)$ est un isomorphisme, autrement dit, θ met en dualité les espaces $\Omega(D)$ et $R(D) + k(X)$.*

Démonstration. Montrons d'abord que si $\omega \in D_k(X)$ est telle que $\theta(\omega) \in J(D)$, alors $\omega \in \Omega(D)$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un point P de X tel que $\operatorname{ord}_P(\omega) < \operatorname{ord}_P(D)$. On pose $n = \operatorname{ord}_P(\omega) + 1$ et on considère un adèle x tel que $x_Q = 0$ si $Q \neq P$ et $\operatorname{ord} x_P = -n$. Alors $x \in R(D)$, mais $\theta(\omega)(x) = \operatorname{res}_P(x_P\omega) \neq 0$ par définition de n, ce qui contredit la nullité $\theta(\omega)$ sur $R(D)$. Donc tout antécédent d'un élément de $J(D)$ par θ est bien dans $\Omega(D)$. En particulier, 0 appartenant à tous les $J(D)$, θ est injective.

Ainsi, $\theta : D_k(F) \longrightarrow J$ est une injection $k(X)$-linéaire d'un $k(X)$-espace vectoriel de dimension 1 et dans un $k(X)$-espace vectoriel de dimension ≤ 1, donc elle est surjective. Donc tout $\alpha \in J(D)$ a un antécédent, qui est nécessairement dans $\Omega(D)$ d'après ce qui précède, et $\theta_{|\Omega(D)} : \Omega(D) \longrightarrow J(D)$ est bien un isomorphisme. $\square$

4.4 Théorème de Riemann-Roch, forme définitive

$D_k(X)$ étant un espace vectoriel de dimension 1 sur $k(X)$, tous les diviseurs provenant de différentielles sont linéairement équivalents. On appelle classe canonique leur classe d'équivalence et diviseur canonique un représentant de cette classe. Soit $K = \operatorname{div}\omega_0$ un diviseur canonique et D un diviseur quelconque. Alors $\omega = f\omega_0 \in \Omega(D)$ si et seulement si $\operatorname{div}(f) + K \geq D$, c'est-à-dire si et seulement si $f \in L(K - D)$. Ainsi, $i(D) = l(K - D)$ et on a finalement

Théorème 4.3 *Pour tout diviseur D,*

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g.$$

Valeurs particulières : $l(D)$ vaut 0 si $D = -E$ avec E effectif non nul, et vaut 1 si $D = 0$. De plus, par définition, $l(K) = i(0) = g$.

Quelques conséquences

1. *Degré de la classe canonique* : Prenant $D = K$, on trouve $\deg K = 2g - 2$.
2. *Diviseurs de grand degré* : D'après le point précédent, si $\deg D > 2g - 2$, $l(K - D) = 0$ et nous avons une formule simple pour $l(D)$:

$$l(D) = \deg D + 1 - g.$$

3. *Diviseurs de degré* $2g - 2$: Soit D de degré $2g - 2$. Si $f \in L(K - D)$, alors le diviseur $\mathrm{div} f + K - D$ est effectif et de degré zéro, c'est-à-dire nul. Ainsi, $L(K - D)$ est de dimension 1 et $l(D) = \deg D + 2 - g = g$.

Références

[1] V. Batyrev - "Birational Calabi-Yau n-folds have equal Betti numbers", *New trends in algebraic geometry*, 1-11, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 264, CUP, Cambridge, 1999.

[2] V. Batyrev & Y. Tschinkel - "Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori", Internat. Math. Res. Notices 12 (1995), 591-635

[3] V. Batyrev & Y. Tschinkel - "Manin's conjecture for toric varieties", J. Algebraic Geom. 7 (1998), n°1, 3220-3239

[4] A. Chambert-Loir & F. Loeser - "Motivic height zeta functions", *arXiv :1302.2077.*

[5] A. Chambert-Loir & Y. Tschinkel - "On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups", Invent. Math. 148 (2002), 421-452

[6] E. Hrushovski & D. Kazhdan - "Motivic Poisson summation", *Mosc. Math. J.* **9** (2009), no.3, 569-623.

[7] S. Lang - *Algebraic number theory*, GTM 110, Springer, 1970

[8] E. Peyre -"Points de hauteur bornée et géométrie des variétés [d'après Y. Manin et al.]", Séminaire Bourbaki n°891, p. 323-344, 2001

[9] D. Ramakrishnan & R. J. Valenza - *Fourier Analysis on Number Fields*, GTM 186, Springer, 1999.

[10] J. Tate - "Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions" in *Algebraic number theory*, J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, eds., London Academic Press (1967), pp. 305-347,

[11] J.-P. Serre - *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, 1960.