TD : feuille n°1
Rappels de topologie, construction d'espaces topologiques

Exercice 1. Propriétés et opérations topologiques

Soit E un espace topologique. Soit P une des propriétés topologiques mentionnées dans les lignes du tableau suivant.

— Pour tout sous-espace topologique $F \subset E$ vérifiant P, préciser (en remplissant le tableau) si la propriété P est préservée par passage à l'adhérence (dans E), l'intérieur, un sous-espace ouvert, un sous-espace fermé de F.

— Pour une famille $(F_i)_{i \in I}$ de sous-espaces topologiques de E vérifiant tous la propriété P, remplir les deux dernières colonnes du tableau en disant si l'union $\bigcup_{i \in I} F_i$ et l'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ vérifient P. Dans le cas contraire, préciser si P se transmet toutefois par union finie, ou même dénombrable.

	adhérence	intérieur	sous-ensemble ouvert	sous-ensemble fermé	union	intersection
séparé						
quasi-compact						
compact						
localement compact						
connexe						
localement connexe						
connexe par arcs						
dense						
séparable						

La ligne « compact » est-elle modifiée si on suppose l'espace ambiant E séparé ?

Exercice 2. Bijections continues

Soient X et Y des espaces topologiques, avec X quasi-compact et Y séparé. Montrer qu'une bijection continue $f : X \to Y$ est un homéomorphisme.

Exercice 3. Compactification d'Alexandrov

Soit X un espace topologique séparé et localement compact. On munit $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de X et les complémentaires dans $\widetilde{X}$ des compacts de X.

1. Vérifier que $\widetilde{X}$ est bien un espace topologique.
2. Montrer que $\widetilde{X}$ est un espace compact. Montrer que le sous-ensemble $\widetilde{X} \setminus \{\infty\}$, muni de la topologie induite, est homéomorphe à l'espace X de départ.
3. Montrer que la topologie définie sur $\widetilde{X}$ est l'unique topologie telle que :
   (a) $\widetilde{X}$ soit compact,
   (b) l'application identité $X \to \widetilde{X} \setminus \{\infty\}$ soit un homéomorphisme.
4. Montrer que $\widetilde{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à S^n.

Exercice 4. Espaces projectifs

Soit $\mathbb{K}$ un corps (on supposera ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'espace $\mathbb{K}\mathbf{P}^n$ est défini comme le quotient de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$ agissant par homothéties. Pour tout $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[x_0 : \ldots : x_n]$ son image dans $\mathbb{K}\mathbf{P}^n$.

1. (a) Le sous-groupe $\{\pm 1\}$ de $\mathbb{R}^*$ agit sur S^n par multiplication. Montrer que le quotient $S^n/\{\pm 1\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$. En déduire que $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ est homéomorphe à l'espace topologique obtenu à partir de $\bar{D}^n$ en identifiant tout point $x \in \partial \bar{D}^n$ avec le point diamétralement opposé $-x$.

   (b) Le sous-groupe S^1 de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes de module 1 agit sur $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par multiplication. Montrer que le quotient S^{2n+1}/S^1 est homéomorphe à $\mathbb{C}P^n$.
2. Montrer que $\mathbb{R}\mathbf{P}^1$ est homéomorphe à S^1 et que $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ est homéomorphe à S^2.
3. (a) Pour $n \geq 1$, montrer que l'application

   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}\mathbf{P}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & [1 : x_1 : \ldots : x_n] \end{array}$$

   définit un homéomorphisme entre $\mathbb{K}^n$ et un ouvert U_0 de $\mathbb{K}\mathbf{P}^n$ que l'on explicitera.

   (b) En déduire que $\mathbb{K}\mathbf{P}^n$ possède un recouvrement par $n+1$ ouverts homéomorphes à $\mathbb{K}^n$.

   (c) Montrer que le complémentaire de chacun de ces ouverts est homéomorphe à $\mathbb{K}\mathbf{P}^{n-1}$.

Exercice 5. Tore

On définit le tore comme l'espace topologique T quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, y)$ pour tous $x, y \in [0, 1]$.

Montrer que T est homéomorphe aux espaces suivants :

(a) le produit $S^1 \times S^1$,

(b) le quotient de $\mathbb{R}^2$ sous l'action du groupe discret $\mathbb{Z}^2$ agissant par translations (de vecteurs non tous colinéaires),

(c) le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ qui sont image d'un point du cercle du plan $\{y = 0\}$ de centre $(2, 0, 0)$ et de rayon 1 par une rotation d'axe (Oz)).

Exercice 6. Écrasements

Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-ensemble. On note X/A l'espace quotient de X par la relation

$$x \sim y \quad \text{si et seulement si} \quad x, y \in A \quad \text{ou} \quad x = y.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\bar{D}^n/\partial \bar{D}^n$ est homéomorphe à S^n.
2. On suppose que X est séparé et que A est compact. Montrer que X/A est séparé.
3. Trouver un espace topologique séparé X et un sous-espace A de X tel que X/A soit non séparé.

Exercice 7. Bouquet d'espaces

Pour $(X_i, x_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés, on note $\vee_{i \in I} X_i$ l'espace, appelé bouquet des X_i, obtenu à partir de l'union disjointe des X_i en identifiant tous les points x_i.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut voir S^{n-1} comme sous-espace de S^n (son « équateur ») par l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$. Montrer que S^n/S^{n-1} est un bouquet de deux sphères de dimension n.
2. La *boucle d'oreille hawaïenne* est le sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des cercles de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$, pour les entiers $n \geq 1$. Soit $(S^1_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de copies de S^1 (avec un point distingué). Montrer que $\vee_{i \in \mathbb{N}} S^1_i$ n'est pas homéomorphe à H.

Exercice 8. CW-complexes

Un *CW-complexe* est un espace topologique séparé non vide muni d'une partition (dont les éléments s'appellent *cellules*) vérifiant les conditions suivantes :

(1) pour toute cellule C, il existe un entier n positif ou nul (appelé la *dimension* de C) et une application continue $f : \bar{D}^n \to X$ (appelée *application charactéristique* de C) du n-disque unité fermé $\bar{D}^n$ vers X telle que
 — la restriction de f à l'intérieur D^n de $\bar{D}^n$ fournit un homéomorphisme entre D^n et C,
 — l'image du bord de $\bar{D}^n$ est contenue dans une réunion finie de cellules de dimension $< n$;

(2) un sous-ensemble $A \subset X$ est fermé si et seulement si, pour toute cellule, l'intersection de A avec l'adhérence de la cellule (dans X) est fermée dans cette adhérence.

Par convention, dans le cas $n = 0$, $\bar{D}^0 = D^0$ est un singleton. Une structure de CW-complexe sur X s'appelle aussi une *décomposition cellulaire* de X. S'il existe un nombre n tel que les dimensions de toutes les cellules de la décomposition soient inférieures ou égales à n, on dit que le CW-complexe X est de dimension finie, et le plus petit tel n est la *dimension* de X. On dit que le CW-complexe X est *fini* s'il n'a qu'un nombre fini de cellules.

Pour tout entier $k \geq 0$, le *k-squelette* X_k d'un CW-complexe X est la réunion de toutes les cellules de dimension inférieure ou égale à k dans la décomposition cellulaire de X. Un sous-complexe de X est un fermé $Y \subset X$ qui est une union de cellules de X.

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que S^n admet une décomposition cellulaire avec deux cellules. Munir S^n également d'une structure de CW-complexe dont le k-squelette soit homéomorphe à S^k pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.
2. Donner une décomposition cellulaire de $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$, de $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, de $\mathbb{R}$, du tore.
3. Soit X un CW-complexe, et soit C une cellule de dimension n de X. Considérons une application caractéristique $f : \bar{D}^n \to X$ de C. Montrer que l'adhérence de C dans X coïncide avec $f(\bar{D}^n)$.
4. Soit X un CW-complexe, et soit $k \geq 0$ un entier. Montrer que le k-squelette X_k de X est un sous-complexe de X.
5. Soit X un CW-complexe. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, l'espace quotient X_k/X_{k-1} est homéomorphe à un bouquet de sphères de dimension k.
6. Montrer qu'un CW-complexe est compact si et seulement s'il est fini.
7. Montrer qu'un CW-complexe est connexe par arcs si et seulement si son 1-squelette l'est.

Exercice 9. Complexes simpliciaux

Soient $n \geq 1$ et $p \geq 0$ des entiers. On dit que les points $x_0, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^n$ sont *affinement indépendants* si $x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0$ sont linéairement indépendants. Un *p-simplexe* de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de $p+1$ points $x_0, \ldots, x_p$ affinement indépendants de $\mathbb{R}^n$, appelés *sommets* du simplexe. On appelle *face* du p-simplexe l'enveloppe convexe de n'importe quel sous-ensemble non vide de l'ensemble des sommets du simplexe. On appelle *complexe simplicial* (respectivement, complexe simplicial fini) dans $\mathbb{R}^n$ un ensemble (respectivement, ensemble fini) K de simplexes de $\mathbb{R}^n$ tel que
 — toute face d'un élément de K soit encore dans K ;
 — l'intersection de deux éléments quelconques $\sigma, \sigma' \in K$ soit ou bien vide, ou bien une face commune à σ et σ'.

On note $|K|$ la réunion de tous les simplexes d'un complexe simplicial K.

1. Dessiner un 0-simplexe, un 1-simplexe, un 2-simplexe, un 3-simplexe.
2. Montrer que l'ensemble des faces d'un simplexe de $\mathbb{R}^n$ est un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^n$.
3. Soit K un complexe simplicial fini dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble des intérieurs relatifs des simplexes de K fournit une décomposition cellulaire de $|K|$.