Corrigé de la feuille n°1
Rappels de topologie, construction d'espaces topologiques

Exercice 1. Propriétés et opérations topologiques

Note : pour l'union, et l'intersection, « non »signifie que la propriété n'est même pas stable par union (resp. intersection) finie. Quand elle est stable par union ou intersection finie (resp. dénombrable) mais pas par union ou intersection quelconque, nous l'avons précisé dans le tableau.

	adhérence	intérieur	sous-ensemble ouvert	sous-ensemble fermé	union	intersection
séparé	non (a, d)	oui	oui	oui	non (a, d)	oui
quasi-compact	non (b)	non	non	oui	non (finie oui)(b)	non (e)
compact	non (a, d)	non	non	oui	non (a, d)	non (e)
compact dans E séparé	oui	non	non	oui	non (finie oui)	oui
localement compact	non (a)	oui	oui	oui	non (i,h)	non (h)
connexe	oui	non	non	non	non	non
localement connexe	non (f)	oui	oui	non (f)	non (f)	non (j)
connexe par arcs	non (f)	non	non	non	non	non
dense	oui	non (g)	non	non	oui	non
séparable	oui	oui	oui	non (k)	non (dénombrable oui)	non (k)

Une liste d'exemples et de contre-exemples

(a) Un ensemble E muni de la topologie grossière : les seuls ouverts sont $\emptyset$ et E.

(b) L'ensemble $\mathbf{N}$ muni de la topologie dont les ouverts sont $\emptyset$ et les sous-ensembles contenant 0. L'adhérence du singleton $\{0\}$ est $\mathbf{N}$ tout entier. De plus, l'ensemble $\mathbf{N}$, n'est pas quasi-compact, car

$$\mathbf{N} = \bigcup_{n \geq 0} \{0, \ldots, n\}$$

est un recouvrement de $\mathbf{N}$ par des ouverts dont on ne peut extraire de sous-recouvrement fini.

(c) Un ensemble infini E muni de la topologie cofinie : les ouverts sont $\emptyset$ et les complémentaires des sous-ensembles finis de E. Cette topologie est quasi-compacte mais pas compacte.

(d) La droite à deux origines, obtenue en recollant deux copies de $\mathbf{R}$ le long du sous-espace $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

(e) Une variante quasi-compacte de la droite à deux origines : on recolle deux copies du cercle S^1 le long du sous-espace des points distincts de 1. L'intersection des images des deux cercles (qui sont compactes) est non-quasi-compacte.

(f) L'adhérence dans $\mathbf{R}^2$ du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ définie sur $]0, +\infty[$. Le graphe lui-même est connexe par arcs, localement connexe et localement connexe par arcs. Son adhérence est connexe, mais ni localement connexe, ni connexe par arcs, à cause des points de $\{0\} \times [-1, 1]$. C'est cependant un fermé de $\mathbf{R}^2$, qui est localement connexe.

(g) L'ensemble $\mathbf{Q}$ avec la topologie induite par celle de $\mathbf{R}$ est dense d'intérieur vide, et n'est pas localement compact. En effet, c'est un espace métrique, donc tout compact de $\mathbf{Q}$ est séquentiellement compact. Soit $x \in \mathbf{Q}$ et soit K un voisinage compact de x. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que $]\alpha, \beta[\cap \mathbf{Q} \subset K$. Donc K contient une suite de rationnels n'ayant pas de valeur d'adhérence rationnelle, contradiction.

(h) Soit X l'espace topologique défini comme

$$X = \big((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{-1, 1\}\big) \cup \big(\mathbb{Q} \times \{0\}\big)$$

où $U \subset X$ est ouvert si et seulement si U est de la forme $(V \times \{-1, 0, 1\}) \cap X$ où V est un ouvert de $\mathbf{R}$. Autrement dit, un ouvert est constitué d'une copie des points rationnels d'un ouvert de $\mathbf{R}$ avec deux copies des points irrationnels de ce même ouvert. En particulier, X n'est pas séparé, car pour tout $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, les deux points $(r, -1)$ et $(r, 1)$ ont exactement les mêmes voisinages. En revanche, l'ouvert X contient deux copies homéomorphes de $\mathbf{R}$, données par

$$A_1 = (\mathbf{R} \times \{0, 1\}) \cap X$$

et

$$A_{-1} = (\mathbf{R} \times \{0, -1\}) \cap X.$$

Les deux espaces A_1 et A_{-1} sont localement compacts, mais leur intersection est donnée par $\mathbf{Q}$ avec la topologie induite par celle de $\mathbf{R}$, qui n'est pas localement compact d'après le contre-exemple précédent.

(i) Le demi-plan ouvert « plus un point »

$$\{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x > 0\}$$

est union de deux espaces localement compacts, mais n'est pas localement compact, car le point $(0, 0)$ n'a pas de voisinage compact.

(j) On considère les parties de $\mathbf{R}^2$ suivantes :

$$A = (\{0\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

où A_n est le segment d'extrémités $(0, \frac{1}{n})$ et $(\frac{1}{n}, 0)$, et

$$B = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \geq 1} B_n$$

où B_n est le segment d'extrémités $(0, \frac{1}{n})$ et $(-\frac{1}{n}, 0)$. A et B sont localement connexes. En revanche, $A \cap B = \{(0, 0)\} \cup \{(0, \frac{1}{n}), n \geq 1\}$ ne l'est pas.

(k) Le plan de Sorgenfrey S est défini comme l'ensemble $\mathbf{R}^2$ muni de la topologie dont une base d'ouverts est l'ensemble des rectangles de la forme $[a, b[\times[c, d[$. Il est séparable : la sous-partie $\mathbf{Q}^2$ est dense. On considère la droite Δ d'équation $y = -x$: la topologie induite sur Δ est la topologie discrète, vu que chaque point $(x, -x)$ de Δ est ouvert dans Δ, comme intersection de Δ avec l'ouvert

$$[x, x + 1[\times[-x, -x + 1[.$$

Donc Δ, n'étant pas dénombrable, n'est pas séparable. De plus, on peut montrer que Δ est fermé : en effet, le domaine

$$\Delta^+ = \{(x, y), y > x\}$$

au-dessus de Δ s'exprime facilement comme union de rectangles, donc est ouvert. Il en est de même pour $\Delta^- = \{(x, y), x > y\}$.

Quelques justifications et remarques

— **Séparation.** Tout sous-ensemble d'un espace topologique séparé est automatiquement séparé.

— **(Quasi-)compacité.** Attention aux définitions : un espace X est *quasi-compact* si de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini (c'est-à-dire s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue). Un espace est *compact* s'il est séparé et quasi-compact. Une partie compacte d'un espace séparé est toujours fermée, mais ce n'est pas nécessairement le cas dans un espace non-séparé (voir contre-exemples a, d). Une partie fermée d'un quasi-compact est quasi-compacte : en effet, si F est un fermé d'un quasi-compact X et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de F , alors par définition de la topologie induite, pour tout i il existe un ouvert V_i de X tel que $V_i \cap F = U_i$. Alors l'ensemble $\{V_i, i \in I\} \cup \{F^c\}$ est un recouvrement ouvert de X, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, il existe $J \subset I$ fini tel que $F^c \cup \bigcup_{j \in I} V_j = X$. En intersectant avec F, on a le résultat. Par conséquent un sous-espace fermé d'un compact est toujours compact.

- **Unions de (quasi-)compacts.** Une union finie de quasi-compacts est forcément quasi-compacte (une réunion de recouvrements finis est toujours finie). Une union finie de compacts n'est pas compacte en général car elle peut ne pas être séparée (exemple (e)), mais l'est si on suppose l'espace ambiant séparé.
- **Intersections de (quasi-)compacts.** Les intersections d'espaces (quasi-)compacts ne sont pas nécessairement quasi-compactes si l'espace ambiant n'est pas séparé, voir (e). En revanche, si $(F_i)_{i\in I}$ sont des compacts d'un espace séparé E, alors ils sont en particulier fermés, donc leur intersection l'est aussi, et est par conséquent compacte en tant que sous-espace fermé de n'importe lequel des compacts F_i.
- **Locale compacité** Attention, un espace localement compact est toujours supposé séparé.

Exercice 2. Bijections continues

Nous allons montrer que f est nécessairement fermée (ce qui montre que sa réciproque est continue). Soit F un fermé de X. Comme X est quasi-compact, F est quasi-compact d'après ce qu'on a vu dans l'exercice 1. Alors $f(F)$ est quasi-compact, donc compact puisque Y est séparé. Comme l'espace Y est séparé, $f(F)$ est fermé, ce qui conclut.

Exercice 3. Compactification d'Alexandrov

1. Il suffit de vérifier que $\emptyset$ est ouvert, que toute intersection finie et toute union d'ouverts est ouverte. Tout d'abord $\emptyset$ est ouvert, puisqu'il est ouvert dans X. Considérons maintenant un ensemble fini d'ouverts $U_1, \ldots, U_n$ de $\widetilde{X}$. Si tous contiennent ∞, alors l'union finie de leurs complémentaires est compacte, donc leur intersection est ouverte. Sinon, l'un d'eux, disons U_1, est un ouvert de X, et dans ce cas $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ est un ouvert de U_1 auquel on a retiré un nombre fini de compacts, ce qui donne bien un ouvert. Enfin, prenons une collection quelconque $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $\widetilde{X}$. Si aucun des ouverts considérés ne contient ∞, alors leur union est encore un ouvert de X, donc de $\widetilde{X}$. Sinon, $\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} U_i^c$ est une intersection de fermés (dans X) et de compacts (avec au moins un compact), donc est compacte, de sorte que $\bigcup_{i\in I} U_i$ est ouverte dans $\widetilde{X}$.
2. Montrons d'abord que $\widetilde{X}$ est séparé. Soient x et y des points distincts de $\widetilde{X}$. Si x et y sont tous les deux dans X, alors en utilisant la séparation de X on trouve des ouverts U et V de X (et donc aussi de $\widetilde{X}$) disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$. Supposons donc maintenant que $y = \infty$. Puisque X est localement compact, nous pouvons choisir un voisinage compact K de x contenu dans X. Alors l'intérieur et le complémentaire de K sont deux ouverts de $\widetilde{X}$ disjoints, l'un contenant x et l'autre y.
   Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $\widetilde{X}$. Il existe $U_\infty \in \mathcal{U}$ contenant ∞ : son complémentaire K_∞ est compact. Il existe alors un $\mathcal{U}_{\text{fin}} \subseteq \mathcal{U}$ fini recouvrant K_∞. D'où la compacité de $\widetilde{X}$.
   L'inclusion $\iota : X \to \widetilde{X} \smallsetminus \{\infty\}$ est une bijection ensembliste et la topologie induite sur $\widetilde{X} \smallsetminus \{\infty\}$ est la même que celle de X, donc ι est un homéomorphisme.
3. On note $\mathcal{T}_{\text{Alex}}$ la topologie d'Alexandrov sur $\widetilde{X}$. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $\widetilde{X}$ vérifiant :
   (a) $\widetilde{X}$ est compact,
   (b) $\mathrm{id} : X \hookrightarrow \widetilde{X} \smallsetminus \{\infty\}$ est un homéomorphisme.
   Par (b), tout ouvert de X appartient à $\mathcal{T}$ et réciproquement, si $V \in \mathcal{T}$, alors V est soit un ouvert de X, soit est de la forme $U \cup \{\infty\}$ où U est un ouvert de X.
   Si $\infty \in V \in \mathcal{T}$, alors $\widetilde{X} \smallsetminus V \subseteq \widetilde{X} \smallsetminus \{\infty\}$ est un fermé de $\widetilde{X}$, donc compact d'après (a). On a ainsi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\text{Alex}}$.
   En particulier, l'identité $(\widetilde{X}, \mathcal{T}_{\text{Alex}}) \to (\widetilde{X}, \mathcal{T})$ est continue. Montrons que sa réciproque est continue également : soit F un fermé pour la topologie d'Alexandrov. Puisque $\widetilde{X}$ est compact, c'est également un compact, et par continuité de l'identité, F est également compact pour la topologie $\mathcal{T}$, donc fermé puisque $(\widetilde{X}, \mathcal{T})$ est séparé. Ainsi, l'identité $(\widetilde{X}, \mathcal{T}_{\text{Alex}}) \to (\widetilde{X}, \mathcal{T})$ est un homéomorphisme, et on a $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{Alex}}$.
4. Par le résultat de la question 3, puisque S^n est compacte, il suffit de voir que l'on peut prendre un point distingué ∞ de S^n tel qu'on ait un homéomorphisme $S^n \smallsetminus \{\infty\} \simeq \mathbf{R}^n$. En prenant pour ∞ le point $(1, 0, \ldots, 0)$, la projection stéréographique à partir de ce point permet de conclure.

« Rappel » sur la topologie quotient

Soit X un espace topologique muni d'une relation d'équivalence $R \subset X \times X$. On note $Y = X/R$ l'ensemble des classes d'équivalence de R, et on considère l'application

$$\pi : X \to X/R = Y$$

qui associé à un élément de X sa classe d'équivalence pour la relation R. La topologie quotient sur Y est la topologie la plus fine tel que π soit continue. Autrement dit, $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X.

Exercice 4. Espaces projectifs

1. La restriction de l'application quotient $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$ à S^n est continue surjective. Deux points x et y dans S^n ont même image dans $\mathbf{RP}^n$ si et seulement si $x = \pm y$, donc cela induit une bijection continue
$$S^n/\{\pm 1\} \to \mathbf{RP}^n.$$
Construisons également la réciproque : pour cela, on part de l'application continue
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \to & S^n \\ (x_0, \dots, x_n) & \mapsto & \left(\frac{x_0}{||x||}, \dots, \frac{x}{||x||}\right) \end{array}$$
où $||\cdot||$ désigne la norme euclidienne. En composant cela par l'application quotient $p : S^n \to S^n/\{\pm 1\}$, on voit qu'on peut passer au quotient pour obtenir une application continue $\mathbf{RP}^{n+1} \to S^n/\{\pm 1\}$, réciproque de la précedente. On a donc bien un homéomorphisme. Cela prouve en particulier que $\mathbf{RP}^n$ est compact, car $S^n/\{\pm 1\}$ l'est. On procède de même avec $\mathbf{CP}^n$: S^{2n+1} apparaît comme sphère unité de $\mathbf{C}^{n+1}$ vu comme $\mathbf{R}^{2n+2}$. Cela montre d'ailleurs que $\mathbf{CP}^n$ est compact : en effet, S^{2n+1}/S^1 est quasi-compact en tant qu'image du compact S^{2n+1} par l'application quotient, qui est continue. Pour montrer que cet espace est séparé, soient $x, y \in S^{2n+1}$ d'images distinctes dans S^{2n+1}/S^1. Par compacité de S^1, la fonction $S^1 \to \mathbf{R}$ définie par $\lambda \mapsto ||x + \lambda y||$ atteint son minimum, qui est > 0 d'après l'hypothèse sur x et y. En choisissant $\epsilon < \frac{1}{2} \min_{\lambda \in S^1} ||x + \lambda y||$ on construit des voisinages saturés disjoints de x et y en posant
$$V_x := (\cup_{\lambda \in S^1} B(\lambda x, \epsilon)) \cap S^{2n+1}$$
et en définissant V_y de même.
2. On a une application bien définie et continue
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 \setminus \{x = 0\} & \to & \mathbf{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{y}{x} \end{array}$$
passant au quotient en une bijection continue
$$\mathbf{RP}^1 \setminus \{[0 : 1]\} = \mathbf{R}^2 \setminus \{x = 0\}/\mathbf{R}^* \to \mathbf{R}.$$
L'inverse de cette bijection est donné par l'application, continue également, donnée par la composée
$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}^2 \setminus \{x = 0\} & \to & \mathbf{RP}^1 \setminus \{[0 : 1]\} \\ z & \mapsto & (1, z) & \mapsto & [1 : z] \end{array}$$
Ainsi, le complémentaire du point $[0 : 1]$ dans $\mathbf{RP}^1$ est homéomorphe à $\mathbf{R}$. D'autre part, $\mathbf{RP}^1$ est compact, donc la question 3 de l'exercice 3, $\mathbf{RP}^1$ est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire S^1. Le même raisonnement fonctionne pour montrer que $\mathbf{CP}^1$ est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$, c'est-à-dire S^2.
Remarque : on peut également directement utiliser l'homéomorphisme $S^1/\{\pm 1\} \simeq \mathbf{RP}^1$ établi à la question précédente, puis montrer que l'application continue $S^1 \to S^1$ définie par $z \mapsto z^2$ (on voit ici S^1 comme l'ensemble des complexes de module 1) induit un homéomorphisme $S^1/\{\pm 1\} \simeq S^1$. Pour le corps des complexes cette méthode est un peu plus compliquée, car il faut dans ce cas montrer $S^3/S^1 \simeq S^2$. (Cela se fait via la *fibration de Hopf*, voir l'exercice 4 de la feuille 3 du TD de topologie.)

3. (a) Soit $U_0 = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbf{KP}^n, x_0 \neq 0\}$, qui est ouvert car d'image réciproque l'ouvert $V_0 = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^{n+1} \setminus \{0\}, x_0 \neq 0\} \in \mathbf{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'application quotient $q : \mathbf{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{KP}^n$. Tout élément de U_0 peut, en divisant par la première coordonnée, s'écrire sous la forme $[1 : x_1 : \ldots : x_n]$.
Ainsi, l'application ϕ_0 de l'énoncé, obtenue comme composée de q avec l'application continue

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & \mathbf{K}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (1, x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

est continue et bijective. D'autre part, on a une application continue et surjective bien définie

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \to & \mathbf{K}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) & \to & \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \end{array},$$

passant au quotient en une application $U_0 \to \mathbf{K}^n$ continue réciproque de ϕ_0, ce qui montre que ϕ_0 est un homéomorphisme.

(b) De la même manière, en posant $U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbf{KP}^n,\ x_i \neq 0\}$, on montre que U_i est homéomorphe à $\mathbf{K}^n$. L'ensemble $\{U_0, \ldots, U_n\}$ forme un recouvrement de $\mathbf{KP}^n$.

(c) Par symétrie, il suffit de le montrer pour U_0. Soit $F_0 = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbf{KP}^n, x_0 = 0\}$ son complémentaire, d'image réciproque $G_0 = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^{n+1} \setminus \{0\}, x_0 = 0\}$ par l'application quotient q, c'est-à-dire que $F_0 = G_0/\mathbf{K}^*$. En identifiant G_0 avec $\mathbf{K}^n \setminus 0$ de manière canonique en envoyant $(0, x_1, \ldots, x_n)$ sur $(x_1, \ldots, x_n)$, on a le résultat.

Exercice 5. Tore

On commence par montrer que les espaces (a), (b) et (c) sont bien les mêmes. Notons que dans tous les cas nous construirons des bijections continues, qui seront des homéomorphismes par l'exercice 2.

Si l'on voit le cercle S^1 comme le cercle unité du plan complexe, l'application $\mathbf{R} \to S^1$ définie par $x \mapsto e^{2i\pi x}$ passe au quotient en un homéomorphisme $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq S^1$, où $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ désigne le quotient de $\mathbf{R}$ sous l'action du groupe $\mathbf{Z}$ agissant par translations. Ceci donne directement l'homéomorphisme

$$S^1 \times S^1 \simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2.$$

D'autre part, il y a un paramétrage du tore de révolution T_{rev} par $S^1 \times S^1$, donné par

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \to & T_{\text{rev}} \\ (\theta, \phi) & \mapsto & ((2 + \cos\phi)\cos\theta, (2 + \cos\phi)\sin\theta, \sin\phi) \end{array}$$

(A θ fixé, les points décrivent le cercle de centre $(2cos\theta, 2\sin\theta, 0)$ et de rayon 1 obtenu en tournant celui décrit par l'énoncé d'un angle θ autour de l'axe (Oz), et à ϕ fixé, ils décrivent le cercle de centre $(0, 0, \sin\phi)$ et de rayon $2 + \cos\phi$ contenu dans le plan $z = \sin\phi$.)

Reste à relier le définition initiale du tore T à l'une de ces trois-là. T est quasi-compact comme image du compact $[0, 1]^2$ par l'application quotient le définissant. L'application continue $[0, 1]^2 \to S^1 \times S^1$ définie par $(x, y) \mapsto (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$ passe au quotient en une bijection continue $T \to S^1 \times S^1$, qui est un homéomorphisme d'après l'exercice 2.

Exercice 6. Ecrasements

1. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{D}^n$, on écrit $||x||$ pour la norme (euclidienne) de x. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} f : \overline{D}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^n \subset \mathbf{R}^{n+1} \\ x & \mapsto & \left(\frac{x}{||x||}\sin(\pi||x||), \cos(\pi||x||)\right) \end{array}.$$

Cette application est bien définie et continue. Lorsque $||x|| \to 0$, sa limite est $(0, \ldots, 0, 1)$, donc f induit une application continue $\overline{D}^n \to S^n$. Tout élément $x \in \partial\overline{D}^n = S^{n-1}$ est envoyé sur le point $(0, \ldots, 0, -1) \in S^n$. Réciproquement, tout antécédent de ce point vérifie $\cos(\pi||x||) = -1$, donc $||x|| = 1$. On vérifie de plus que f induit un homéomorphisme entre l'intérieur de $\overline{D}^n$ et $S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\}$. Par passage au quotient, on a alors le résultat voulu.

2. Montrons d'abord que pour chaque point $x \notin A$, on peut construire un voisinage V de A et un voisinage U de x tels que l'intersection $U \cap V$ soit vide. Pour chaque point $a \in A$, on choisit V_a voisinage de a et U_a voisinage de x tels que $V_a \cap U_a = \varnothing$. Par compacité de A, on peut choisir un sous-recouvrement fini de $\{V_a \mid a \in A\}$, que nous noterons $\{V_i \mid i = 1 \dots n\}$. Alors $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ et $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$ conviennent. Soit $q : X \to X/A$ est l'application quotient. On note x_0 le point dans X/A, tel que $q(A) = \{x_0\}$. Par définition, q induit un homéomorphisme entre $X \backslash A$ et $(X/A)\backslash\{x_0\}$, de sorte que $q(U)$ est ouvert. Nous avons $q^{-1}(q(V)) = V$ et $q^{-1}(q(U)) = U$, donc $q(V)$ est un ouvert contenant x_0 et $q(U)$ est un ouvert disjoint de $q(V)$, contenant $q(x)$. Ainsi, nous avons montré qu'on peut séparer x_0 de n'importe quel point distinct de x_0.
Soient maintenant deux points $x_1 \neq x_2$ dans $X\backslash A = (X/A)\backslash\{x_0\}$: on commence par prendre dans X, par l'argument précédent, des voisinages V_1, V_2 de A et des voisinages U_1 de x_1, U_2 de x_2 vérifiant
$$V_1 \cap U_1 = \emptyset, \quad V_2 \cap U_2 = \emptyset.$$
Par séparation de X, quitte à réduire U_1 et U_2, on peut supposer qu'ils sont disjoints. Alors $q(U_1)$ et $q(U_2)$ sont des ouverts disjoints de X/A contenant x_1 et x_2 respectivement.
3. Prendre par exemple $A = \mathbf{Q}$ et $X = \mathbf{R}$. Puisque tout ouvert non-vide de $\mathbf{R}$ intersecte $\mathbf{Q}$, tout ouvert non-vide de $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ contient le point sur lequel est envoyé $\mathbf{Q}$, et deux ouverts non-vides s'intersectent donc toujours. (Plus généralement cette construction marche donc dès que A dense dans X).

Exercice 7. Bouquet d'espaces

1. Il s'agit d'identifier tous les points de l'équateur de la sphère S^n. Chaque hemisphère est homéomorphe à la boule $\overline{D}^n$ par projection sur $\mathbf{R}^n$, et si on identifie tous les points de la frontière de D^n, on obtient le compactifié d'Alexandrov de $D^n \simeq \mathbf{R}^n$, à savoir la sphère S^n.
2. Le bouquet $\vee_{i\in\mathbf{N}} S^1_i$ n'est pas compact : on peut trouver un recouvrement infini minimal en prenant par exemple un ϵ-voisinage du point de rattachement x de tous les cercles, ainsi que les complémentaires de x dans tous les cercles. En revanche, l'espace topologique H est compact : tout recouvrement ouvert de H contient un ouvert U contenant le point $(0, 0)$, et donc également tous les cercles de centre $(\frac{1}{n}, 0)$ pour n assez grand, de sorte que $H\backslash U$ est un fermé d'un bouquet d'un nombre fini de cercles, donc est compact.

Exercice 8. CW-complexes

Une remarque : pour un CW-complexe fini X, les conditions (1) et (2) sont automatiquement vérifiées. C'est évident pour (1). Pour montrer que (2) est vérifié : le sens direct est clair. Soit maintenant $A \subset X$ tel que $A \cap \bar{e}$ est fermé dans $\bar{e}$ pour toute cellule e. Puisque $\bar{e}$ est fermé, cela veut dire que $A \cap \bar{e}$ est en fait fermé dans X. X étant la réunion d'un nombre fini d'adhérences de cellules, A est réunion d'un nombre fini de fermés, donc A est fermé. Ainsi, dans les exemples qui suivent, il suffit de décrire les cellules, et si elles sont en nombre fini, la topologie naturelle sera directement la bonne.

1. On rappelle (voir exercice 6, question 1), que la sphère est homéomorphe à l'espace obtenu en identifiant tous les points de la frontière de $\overline{D}^n$. De plus, l'homéomorphisme obtenu se restreint en un homéomorphisme entre D^n et S^n privé d'un point (que nous appelerons e^0). Ainsi, S^n peut être munie de la décomposition cellulaire avec
   — une cellule de dimension 0, qui est e^0
   — une cellule $e^n = S^n \backslash e^0$ de dimension n, avec pour application caractéristique le morphisme quotient $f : \overline{D}^n \to \overline{D}^n/\partial\overline{D}^n \simeq S^n$.

   D'autre part, on peut également voir S^n comme union disjointe $S^n = S^n_{++} \cup S^{n-1} \cup S^n_{--}$, où
$$S^n_{++} = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n,\ x_n > 0\}$$
   et
$$S^n_{--} = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n,\ x_n < 0\},$$

et où on a identifié $\{x_n = 0\} \cap S^n$ avec S^{n-1}. Nous avons vu à la question 1(a) de l'exercice 1 que la projection sur le plan $x_n = 0$ induit un homéomorphisme entre $S^n_+ = S^n_{++} \cup S^{n-1}$ et $\bar{D}^n$, qui se restreint en un homéomorphisme entre S^n_{++} et D^n. Il en est de même pour S^n_{--}. Ainsi, nous pouvons définir une décomposition cellulaire sur S^n par récurrence sur n de la manière suivante : la décomposition cellulaire de S^0, qui est l'union de deux points, est constituée des deux 0-cellules naturelles. Supposons la décomposition cellulaire construite au rang $n-1$. La décomposition cellulaire de S^n est alors donnée par

— deux n-cellules S^n_{++} et S^n_{--} avec pour applications caractéristiques les homéomorphismes $\overline{D}^n \to S^n_+$ et $\overline{D}^n \to S^n_-$.
— les k-cellules pour $k \leq n$ de S^{n-1} déjà construites, vues comme sous-espaces de S^n via l'inclusion $S^{n-1} \subset S^n$, avec les mêmes applications caractéristiques, composées avec l'injection $S^{n-1} \to S^n$.

Cela donne une décomposition cellulaire avec deux k-cellules pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, et de k-squelette S^k pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.

2. — **L'espace projectif réel.** L'espace $\mathbf{RP}^0$ est un point, donc un CW-complexe constitué d'une unique 0-cellule. Par récurrence, on suppose qu'on a muni $\mathbf{RP}^{n-1}$ d'une structure de CW-complexe avec une i-cellule pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, et telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, le i-squelette soit $\mathbf{RP}^i$. Nous avons vu dans l'exercice 4 que $\mathbf{RP}^n$ est homéomorphe à $S^n/\{\pm 1\}$, mais aussi à l'espace obtenu en identifiant les points diamétralement opposés de la frontière $\partial \overline{D}^n \simeq S^{n-1}$ de $\overline{D}^n$. On peut donc écrire $\mathbf{RP}^n$ comme une union disjointe $D^n \cup (S^{n-1}/\{\pm 1\}) = D^n \cup \mathbf{RP}^{n-1}$. On prend pour décomposition cellulaire de $\mathbf{RP}^n$ celle de $\mathbf{RP}^{n-1}$, à laquelle on ajoute une n-cellule d'application caractéristique l'application quotient $\overline{D}^n \to \mathbf{RP}^n$.
   — **L'espace projectif complexe** On procède de manière analogue aux espaces projectifs réels. $\mathbf{CP}^0$ est un point. On rappelle que $\mathbf{CP}^n$ est obtenu comme quotient de la sphère $S^{2n+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$ par l'action naturelle de S^1, où l'on voit la sphère comme l'espace
   $$\{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1}, |z_1|^2 + \ldots + |z_{n+1}|^2 = 1\}.$$
   Le sous-ensemble de S^{2n+1} consistant des points dont la dernière coordonnée z_{n+1} est un réel positif ou nul est de la forme
   $$\{(z, \sqrt{1-|z|^2}) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^+, \ |z| \leq 1.\}$$
   C'est le graphe de la fonction $z \mapsto \sqrt{1-|z|^2}$, et par projection sur $\mathbf{C}^n$ il est homéomorphe à la boule $\overline{D}^{2n}$, de frontière S^{2n-1} correspondant à l'ensemble des points de S^{2n+1} de dernière coordonnée z_{n+1} nulle. Tout point de S^{2n+1} de dernière coordonnée non-nulle est équivalent sous l'action de S^1 à un unique point de dernière coordonnée réelle et strictement positive. Ainsi, on voit que $\mathbf{CP}^n$ peut être vu comme la boule $\overline{D}^{2n}$ dont on a identifié les points de la frontière $\partial \overline{D}^{2n} = S^{2n-1}$ sous l'action de S^1. On écrit donc $\mathbf{CP}^n = D^{2n} \cup \mathbf{CP}^{n-1}$ (union disjointe), avec une $2n$-cellule d'application caractéristique l'application quotient $\overline{D}^{2n} \to \mathbf{CP}^n$. Par récurrence, on voit que $\mathbf{CP}^n$ a une structure de CW-complexe avec une unique cellule en chaque dimension paire, et aucune cellule de dimension impaire.
   — **La droite réelle** Comme ensemble de 0-cellules on prend $\mathbf{Z}$, et comme ensemble de 1-cellules on prend les segments $[n, n+1]$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.
   — **Le tore** On utilise la représentation du tore $\mathbf{T}$ comme quotient du carré $[0,1] \times [0,1]$. Comme 0-cellule, on prend le point $(0,0)$. Comme 1-cellules, on prend les deux segments $[0,1] \times \{0\}$ et $\{0\} \times [0,1]$, dont les extrémités sont toutes recollées sur l'unique 0-cellule. Enfin, on aura une 2-cellule, donnée par la projection canonique $[0,1] \times [0,1] \to \mathbf{T}$. (noter que le carré $[0,1]^2$ est homéomorphe au disque $\overline{D}^2$).
3. Puisque f est continue, nous avons $f(\overline{D}^n) \subset \overline{f(D^n)} = \overline{C}$. D'autre part, $f(\overline{D}^n)$ est compact comme image du compact $\overline{D}^n$ (X étant supposé séparé), donc c'est un fermé de X. Ainsi, $f(\overline{D}^n)$ est un fermé qui contient $f(D^n) = C$, et est contenu dans l'adhérence de C. On a donc bien $f(\overline{D}^n) = \overline{C}$. Ainsi, $\bar{C}$ est compact, et peut être vu comme l'union disjointe de la cellule $C = f(D^n)$ et du compact $f(\partial \overline{D}^n)$. Ce dernier sera par conséquent parfois noté (par abus !) $\partial \bar{C}$.
4. Le k-squelette est une union de cellules, donc il reste à montrer qu'il est fermé. D'après la question précédente, pour tout $n \leq k$ et pour toute n-cellule C, l'adhérence de C dans X est incluse dans X_k,

et donc $X_k \cap \bar{C} = \bar{C}$ est bien fermé dans $\bar{C}$. Soit maintenant C une n-cellule avec $n > k$, d'application caractéristique $f : \overline{D}^n \to X$. Nous avons par définition $\bar{C} \cap X_k = f(\partial \overline{D}^n) \cap X_k$, qui est inclus dans un nombre fini de cellules de dimension $\leq k$. Soient $C_1, \ldots, C_m$ ces cellules, alors, leurs adhérences étant incluses dans X_k, on a

$$\bar{C} \cap X_k = \bar{C} \cap \bigcup_{i=1}^{m} \bar{C}_k,$$

qui est bien fermé dans $\bar{C}$.

Remarque Plus généralement, c'est un bon exercice (très conseillé !), de montrer que si X' est un sous-espace topologique de X qui est une union de cellules, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) X', avec sa partition en cellules induite, est un CW-complexe.

(b) X' est fermé.

(c) Pour toute cellule e contenue dans X', l'adhérence $\bar{e}$ est également contenue dans X'.

Cela donne trois caractérisations commodes des sous-complexes d'un CW-complexe.

5. On suppose que $X_{n-1} \neq X_n$, de sorte qu'on a au moins une n-cellule. On note $e_1^n, \ldots, e_k^n$ les n-cellules. Par définition du CW-complexe, en écrasant le sous-espace X_{n-1} de X_n on identifie les points de toutes les frontières des e_i^n (sans toucher à leurs intérieurs, qui sont inclus dans $X_n \backslash X_{n-1}$). Chaque e_i^n est homéomorphe à D^n, donc si on identifie tous les points de la frontière de e_i^n, on obtient un espace homéomorphe à S^n. Puisque dans X_n/X_{n-1} tous les points provenant des frontières des e_i^n sont identifiés, X_n/X_{n-1} est un bouquet de k sphères S^n.
6. Si X est fini, alors comme X est séparé et est une union finie de compacts, il est par conséquent compact.

   Réciproquement, supposons X compact. Tout d'abord, il est nécessairement de dimension finie. En effet, dans le cas contraire, soit (u_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que pour tout n, le complexe X ait une u_n-cellule. Pour tout $n \geq 0$, on choisit un point x_n dans une u_n-cellule et on note S l'ensemble de tous les x_n. Notons que pour toute k-cellule C, l'ensemble $\bar{C} \cap S$ est fini (contenu dans $\{x_0, \ldots, x_k\}$), donc fermé. Cela montre que l'ensemble S est fermé, et donc compact. D'autre part, chaque sous-ensemble de S, par le même argument, est fermé dans X, donc aussi dans S. Par conséquent, S a la topologie discrète, ce qui est impossible puisqu'il est compact et infini.

   On montre maintenant par récurrence sur n que pour tout n, le n-squelette de X ne contient qu'un nombre fini de cellules. Pour cela on utilisera le fait que pour tout n, X_n est fermé dans X, donc compact. On utilisera également le petit résultat suivant, bien utile :

   Lemme Soit X un CW-complexe de dimension n. Alors toute n-cellule de X est ouverte dans X.

   Preuve : Soit C une n-cellule de X, et soit C' une autre cellule. Comme C' est nécessairement de dimension $\leq n$, son adhérence n'intersecte pas C, de sorte que $(X \setminus C) \cap \bar{C}' = \bar{C}'$ est fermé, d'où $X \setminus C$ fermé, d'où le résultat.

   Reprenons notre récurrence.

   Pour $n = 0$, X_0 est discret, et compact, donc fini. Supposons le résultat vrai pour n. Soit $\{e_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des $n+1$-cellules de X, avec $f_i : \overline{D}^{n+1} \to X_{n+1}$ l'application caractéristique.

$$V_i = f_i \left(\left\{ x \in D^{n+1}, |x| < \frac{3}{4} \right\} \right)$$

   et

$$W_i = f_i \left(\left\{ x \in D^{n+1}, |x| \leq \frac{1}{2} \right\} \right).$$

   Chaque W_i est compact, donc fermé dans X_{n+1}. D'autre part, V_i est ouvert dans e_i car $(f_i)_{|D^{n+1}} : D^{n+1} \to e_i$ homéomorphisme. Par le lemme, V_i est ouvert dans X_{n+1}. On pose alors $U = X_{n+1} \backslash \cup_{i \in I} W_i$, qui est un ouvert de X_{n+1}, de sorte que $\{U\} \cup \{V_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert du compact X_{n+1}, ce qui implique que I est fini.

Remarque : la même méthode se généralise pour montrer qu'un compact d'un CW-complexe X est contenu dans la réunion d'un nombre fini de cellules de X.

7. On commence par montrer le lemme suivant, dont le sens direct est une application immédiate : Soit $n \geq 1$, et soient x et y deux points contenus dans le n-squelette de X. Alors s'il existe un chemin de x vers y dans X, il en existe un dans X_n. Soit $\gamma : [0,1] \to X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Comme $\gamma([0,1])$ est compact, il n'est contenu que dans un nombre fini de cellules. Nous pouvons donc supposer que l'image de γ est incluse dans le N-squelette pour un $N \geq n+1$. Soit e_i une N-cellule qui intersecte l'image de γ. On définit alors

$$t_0 := \inf\{t \in [0,1], \gamma(t) \in \ e_i\} \quad \text{et} \quad t_1 := \sup\{t \in [0,1], \gamma(t) \in \ e_i\}.$$

Rappelons que e_i est ouverte dans X_N : ainsi, $\gamma^{-1}(e_i)$ est un ouvert, on a $\gamma(t_0) \notin e_i$ et $\gamma(t_1) \notin e_i$, mais les deux appartiennent à $\partial \bar{e}_i$. Cet espace est l'image de S^{N-1} par une application continue, donc, puisque $N \geq n+1 \geq 2$, il est connexe par arcs. On peut donc remplacer la partie de γ entre t_0 et t_1 par un arc contenu dans le $N-1$-squelette de X. Par récurrence, on a le résultat.

Pour l'implication réciproque, on va raisonner par récurrence, en montrant que pour tout $n \geq 1$, X_n est connexe par arcs. Le cas $n = 1$ est vrai par hypothèse. Supposons que pour un certain n, X_n est connexe par arcs. Soient x et y deux points de X_{n+1}. Si tous les deux sont dans X_n, on a un chemin continu qui les relie dans X_n. Sinon, supposons par exemple que $x \in X_{n+1} \backslash X_n$. Alors x appartient à une $n+1$-cellule. Par connexité par arcs de l'adhérence de celle-ci (comme image de $\overline{D}^{n+1}$ par une application continue), on peut relier x à un point x_1 de la frontière de la cellule, qui appartient par conséquent au n-squelette. On peut de même si nécessaire remplacer y par un point y_1 du n-squelette, et l'hypothèse de récurrence conclut.

Exercice 9. Complexes simpliciaux

Note : il faut ajouter dans l'énoncé une hypothèse de *locale finitude* : chaque point de $\mathbf{R}^n$ doit avoir un voisinage intersectant seulement un nombre fini de simplexes de K (On ne veut pas, par exemple, que le segment $[0,1]$ vu comme réunion de points, soit considéré comme un complexe simplicial).

1.
2.
3. On rappelle que l'intérieur relatif d'un p-simplexe σ de sommets $x_0, \ldots, x_p$ est l'ensemble

$$\text{Intrel}(\sigma) = \left\{ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i x_i \mid \lambda_0, \ldots, \lambda_p > 0, \ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Ainsi, un simplexe est la réunion de son intérieur relatif et de ses faces. L'intersection de deux simplexes de K est ou bien vide, ou bien une face de chacun des deux, donc l'intersection des intérieurs relatifs de deux simplexes quelconques est nécessairement vide. Puisque chaque face d'un élément de K est encore dans K, nous avons que $|K|$ est la réunion disjointe des intérieurs relatifs des simplexes de K. Un p-simplexe étant homéomorphe à $\overline{D}^p$, fixons, pour tout p et pour chaque p-simplexe σ de K, un homéomorphisme $f_\sigma : \overline{D}^p \to \sigma$ (induisant un homéomorphisme $D^p \to \text{Intrel}(\sigma)$). Cela fournit une décomposition cellulaire de $|K|$, puisque $f_\sigma(\partial \overline{D}^p)$ est la réunion des faces de σ, qui sont des cellules de dimension inférieure. (On rappelle, cf début du corrigé de l'exercice 8, que la topologie est nécessairement la bonne car il n'y a qu'un nombre fini de cellules).