TD : feuille n°2
Homotopie

Exercice 1. Pour commencer

On fixe X et Y des espaces topologiques.

1. Soient $f, g : X \to Y$ deux applications constantes. Montrer que si f et g sont homotopes, alors leurs images sont dans la même composante connexe par arcs de Y.
2. Montrer que deux applications continues $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ sont toujours homotopes.
3. Montrer que si deux applications continues $f, g : X \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ sont telles que pour tout $x \in X$ on ait $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ (en norme euclidienne), alors f et g sont homotopes.
4. Soient p et q des polynômes à coefficients complexes de même degré. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $R > r$, les applications continues
$$\{z \in \mathbb{C},\ |z| = R\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$$
données par $z \mapsto p(z)$ et $z \mapsto q(z)$ soient homotopes.
5. Soit $n \geq 1$. Montrer que toute application continue non-surjective $X \to S^n$ est homotope à une application constante.
6. Soit $n \geq 1$. Montrer que si deux applications continues $f, g : X \to S^n$ sont telles que pour tout $x \in X$ on ait $|f(x) - g(x)| < 2$, alors f et g sont homotopes. En déduire qu'une application continue sans point fixe $f : S^n \to S^n$ est homotope à l'application $x \mapsto -x$.

Exercice 2. Quelques exemples d'équivalences d'homotopie

1. Le *ruban de Moebius* est l'espace topologique M, quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$. Dessiner M. Montrer que M a le même type d'homotopie que S^1.
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un rétracte par déformation de $GL_n(\mathbb{R})$.
3. Si X et X', resp. Y et Y', sont des espaces topologiques homotopiquement équivalents, montrer que les produits $X \times Y$ et $X' \times Y'$ ont même type d'homotopie.

Exercice 3. Type d'homotopie d'un complémentaire

1. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^n$, avec $k < n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus E$ a le même type d'homotopie que S^{n-k-1}.
2. Soit C un sous-ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus C$ a le même type d'homotopie que S^{n-1}.
3. Soit X un espace topologique, et A et B deux sous-espaces de X, non-vides et distincts de X. Montrer que l'on peut avoir A et B homotopiquement équivalents, sans que $X \setminus A$ et $X \setminus B$ soient homotopiquement équivalents.
4. Montrer que le tore privé d'un point a le type d'homotopie d'un bouquet de deux cercles.

Exercice 4. Homotopies et cônes

Le cône CX d'un espace topologique X est l'espace quotient obtenu en écrasant le sous espace $X \times \{0\}$ de $X \times [0, 1]$. Soit $q : X \times [0, 1] \to CX$ l'application quotient. On note ι_X l'application

$$\iota_X : \begin{array}{ccc} X & \to & CX \\ x & \mapsto & q(x, 1) \end{array}.$$

1. Montrer que pour tout espace X, le cône CX est contractile.
2. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que f est homotope à une application constante si et seulement s'il existe une application $F : CX \to Y$ telle que $F \circ \iota_X = f$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le cône CS^n est homéomorphe à $\bar{D}^{n+1}$.
4. Soient X et Y des espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application continue. Le cône de f, noté C_f, est l'espace topologique obtenu en recollant CX avec Y le long de f : plus précisément, c'est l'espace quotient de l'union disjointe $CX \cup Y$ par la relation $\iota_X(x) \sim f(x)$ pour tout $x \in X$.
   (a) Soit n un entier naturel. Montrer que si $X = S^n$ et que Y est un CW-complexe de dimension inférieure ou égale à n, alors C_f est naturellement muni d'une structure de CW-complexe de dimension $n + 1$.
   (b) Soient $f, g : X \to Y$ deux applications homotopes. Montrer que C_f et C_g ont même type d'homotopie.

Exercice 5. Rétractions

Soit X un espace topologique. Une rétraction $r : X \to A$ de X vers une partie $A \subset X$ est une application continue telle que $r \circ i = \mathrm{id}_A$, où $i : A \to X$ est l'inclusion. On dit dans ce cas que A est un rétracte de X. Nous allons comparer les trois notions *rétraction*, *rétraction par déformation*, et *rétraction par déformation forte*.

1. Soit X un espace topologique. Montrer que tout point de X est un rétracte de X. Est-ce toujours un rétracte par déformation de X ?
2. **Le peigne.** On note I le segment $[0, 1]$. Soit $P \subset \mathbb{R}^2$ le sous-espace défini par
$$P = I \times \{0\} \cup \left(\left(\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\} \right) \times I \right).$$
   Identifier les points de P qui sont des rétractes (resp. des rétractes par déformation, resp. des rétractes par déformation forte) de P.

Exercice 6. Composantes connexes par arcs des espaces fonctionnels

Soient X et Y des espaces topologiques avec X localement compact. On note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y, muni de la topologie compacte-ouverte. Montrer que deux fonctions f, g sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace $\mathcal{C}(X, Y)$ si et seulement si elles sont homotopes.

Exercice 7. Lacets remplissant la sphère

Soit X un espace topologique. Un *chemin* sur X est une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$. Un *lacet* sur X est un chemin γ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

1. Soit $n \geq 1$ et soit γ un lacet sur la sphère S^n dont l'image ne soit pas toute la sphère. Montrer que γ est homotope à un lacet constant.
2. Soit $n \geq 1$. On admet le fait qu'il existe des lacets dont l'image soit égale à toute la sphère S^n. En existe-t-il qui soient de plus homotopes à un lacet constant ?
3. Soit $n \geq 2$. Soit γ un chemin sur S^n. Montrer qu'il existe une subdivision
$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = 1$$
   (pour $k \geq 1$) de $[0, 1]$ telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, la restriction $\gamma_{|[a_i, a_{i+1}]}$ soit homotope, relativement aux extrémités a_i et a_{i+1}, à un chemin d'image nulle part dense dans la sphère S^n.
4. Soit $n \geq 2$. Montrer que tout lacet sur S^n est homotope à un lacet qui ne remplit pas toute la sphère. En déduire que tout lacet sur S^n est homotope à un lacet constant. Cette propriété est-elle toujours vraie pour $n = 1$?