Corrigé feuille n°2
Homotopie

Exercice 1. Pour commencer

1. C'est une conséquence directe de la définition de l'homotopie.
2. On utilise la convexité de $\mathbf{R}^n$: une homotopie entre f et g est donnée par
$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$
3. On fait de même, sauf que maintenant il faut éviter le point 0. Or la condition proposée assure que pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x \in X$,
$$(1-t)f(x) + tg(x) = f(x) + t(g(x) - f(x))$$
ne s'annule pas. L'application définie dans la solution précédente convient toujours.
4. On remarque que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$, les applications $z \mapsto p(z)$ et $z \mapsto \lambda p(z)$ définies sur un cercle $\{|z| = R\}$ avec R suffisamment grand (supérieur au maximum des modules des racines de p et de q) sont homotopes, car reliées par l'homotopie $H(z,t) = \gamma(t)p(z)$ pour un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}^*$ reliant 1 à λ. On peut donc supposer que p et q sont unitaires. Alors $p(z) - q(z)$ est de degré $\leq n-1$, et par conséquent il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbf{C}$ de module $> r$, $|p(z) - q(z)| < |p(z)|$. En utilisant la question précédente, on conclut.
5. Soit $x \in S^n \backslash f(X)$, et soit $p : S^n \backslash \{x\} \to \mathbf{R}^n$ la projection stéréographique à partir de x, qui rappelons-le, est un homéomorphisme. Alors l'application $p \circ f$, est, d'après la question 2., homotope à l'application constante. Si H est l'homotopie correspondante, alors l'application $(x,t) \mapsto p^{-1}H(x,t)$ définit une homotopie entre f et une application constante.
6. Soient $x \in X$, $t \in [0,1]$ tels que $(1-t)f(x) + tg(x) = 0$. En prenant les normes, cela signifie que $t = \frac{1}{2}$, d'où $f(x) = -g(x)$, ce qui signifie que $|f(x) - g(x)| = 2|f(x)| = 2$, contradiction. Ainsi, l'homotopie définie par
$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|}$$
convient. La deuxième question est une application directe de la première.

Exercice 2. Quelques équivalences d'homotopie

1. Soit π la contraction de la première coordonnée donnée par
$$\begin{array}{cccc} \pi : & M & \to & M \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\frac{1}{2}, y\right) \end{array}$$
C'est une rétraction par déformation. En effet, une homotopie $H : M \times I \to M$ entre l'identité de M et π est donnée par :
$$H((x,y),t) = \left((1-t)x + \frac{t}{2}, y\right).$$
2. On peut appliquer le processus de Gram-Schmidt à une matrice inversible : on obtient une décomposition (qui est unique) comme le produit d'une matrice orthogonale et une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont strictement positifs. On a donc une bijection :
$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to O_n(\mathbf{R}) \times T_n^+(\mathbf{R}),$$

où $T_n^+(\mathbf{R})$ désigne le groupe des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs. Elle est continue, car les opérations effectuées dans l'algorithme de Gram Schmidt sont continues, et c'est même un homéomorphisme car l'inverse est simplement le produit des matrices, qui est continu. De plus, sur $O_n(\mathbf{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ l'application est égale à l'identité sur le premier facteur, et est constante égale à I_n sur le deuxième facteur. Comme $T_n^+(\mathbf{R})$ est convexe, il est contractile, d'où le résultat.

3. Soient $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$ des équivalences d'homotopie, de sorte qu'il existe $f' : X' \to X$ et $g' : Y' \to Y$ telles que $f' \circ f$ soit homotope à id_X, $f' \circ f$ à $\mathrm{id}_{X'}$ etc. On vérifie alors que $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ est une équivalence d'homotopie : si H est une homotopie de $f' \circ f$ vers id_X et I une homotopie de $g' \circ g$ vers id_Y, alors
$$H \times I : (t,(x,y)) \mapsto (H(t,x), I(t,y))$$
est une homotopie de $(f' \circ f) \times (g' \circ g) = (f' \times g') \circ (f \times g)$ vers $\mathrm{id}_{X \times Y}$. De même pour $f \circ f'$ et $g \circ g'$.

Exercice 3. Type d'homotopie d'un complémentaire

1. Par changement de coordonnées, on peut supposer que E est l'espace $\{0\} \times \mathbf{R}^k$, de sorte que
$$\mathbf{R}^n \backslash E = \underbrace{(\mathbf{R}^{n-k} \backslash \{0\})}_{\sim S^{n-k-1}} \times \underbrace{\mathbf{R}^k}_{\text{contractile}} \sim S^{n-k-1}.$$

2. Quitte à appliquer une translation et une homothétie, on peut supposer que C contient 0 et est contenu dans la boule $B(0, \frac{1}{2})$. On considère alors la rétraction $\pi : \mathbf{R}^n \backslash C \to S^{n-1}$ qui envoie x sur $\frac{x}{|x|}$. On définit l'homotopie
$$H(x,t) = t\frac{x}{|x|} + (1-t)x$$
entre π et $\mathrm{id}_{\mathbf{R}\backslash C}$. Il faut juste vérifier que l'image de H n'intersecte pas C. Or, pour tout x, $H(x,t)$ décrit le segment reliant $\frac{x}{|x|}$ et x. Si C intersecte ce dernier, alors comme il est convexe et contient 0, il doit contenir l'une des deux extrémités x ou $\frac{x}{|x|}$, ce qui est impossible.

3. On considère $X = \mathbf{R}^2$, $A = \{0\}$ et B la droite $x = 0$. Alors A et B ont même type d'homotopie (A est même un rétracte par déformation forte de B), mais $\mathbf{R}^2 \backslash A$ a le type d'homotopie de S^1, alors que $\mathbf{R}^2 \backslash B$ est une union disjointe de deux espaces contractiles, donc a le même type d'homotopie qu'un ensemble de deux points.

4. Utiliser la caractérisation du tore comme quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par les identifications $(x,0) \sim (x,1)$ et $(0,y) \sim (1,y)$, et rétracter l'intérieur du carré $[0,1] \times [0,1]$ sur la frontière.

Exercice 4. Homotopies et cônes

Notons que si X est séparé, alors CX aussi : il est aisé de trouver des voisinages saturés disjoints de deux points de $X \times [0,1]$.

1. On dispose d'une rétraction par déformation forte vers le sommet.

2. Supposons d'abord qu'une telle F existe. Alors $F \circ q : [0,1] \times X$ est une homotopie de f vers une application constante. Réciproquement, si f est homotope à une application constante, alors l'homotopie H entre f et l'application constante est une application (continue) $H : X \times I \to Y$ telle que $H|_{X \times \{0\}}$ est constante. Donc H se factorise en une application continue $F : CX \to Y$. L'application F ainsi construite nous convient.

3. Puisque $\partial \bar{D}^{n+1} = S_n$, un point non nul de $\bar{D}^{n+1}$ est repéré de manière unique par un élément $\theta \in S^n$ et un réel $r \in [0,1]$ (sa norme). On considère alors l'application $\bar{D}^{n+1} \to CS^n$ qui associe à un point non nul de $\bar{D}^{n+1}$ ses coordonnées polaires généralisées (θ, r), et qui envoie 0 sur la classe de $\{0\} \times S^n$. C'est une application bijective, continue, donc un homéomorphisme parce que les deux espaces sont compacts.

4. (a) C'est une conséquence directe de la question précédente.

(b) L'idée est d'utiliser la moitié inférieure du cône pour appliquer l'homotopie entre f et g. Soit $H : X \times [0,1] \to Y$ une homotopie de f vers g, de sorte que $H(\cdot,0) = f$ et $H(\cdot,1) = g$. En notant entre crochets la classe d'un élément de $X \times [0,1] \coprod Y$ dans C_f, on définit une application continue

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & X \times [0,1] \coprod Y & \to & C_f \\ & y \in Y & \mapsto & [y] \\ & (x,t) & \mapsto & \begin{cases} [(x,2t)] & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ [H(x,2t-1)] & \text{si } t > \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}.$$

On note que
— Pour tout $x \in X$, $\Phi(x,0) = [(x,0)] = [(x',0)] = \Phi(x,0)$.
— Pour tout $x \in X$, $\Phi(x,1) = [H(x,1)] = [g(x)] = \Phi(g(x))$.
donc Φ passe au quotient par les relations définissant C_g, et donne une application continue (que l'on appelle encore Φ) $C_g \to C_f$.

De même, on construit une application continue $\Psi : C_f \to C_g$, en utilisant l'homotopie inverse $H'(x,t) = H(x, 1-t)$. Il reste à montrer que $\Phi \circ \Psi : C_f \to C_f$ est homotope à l'identité de C_f (et de même $\Psi \circ \Phi$ homotope à l'identité de C_g). Pour cela, il est important d'utiliser le fait que H et H' sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 5. Rétractions

1. Soit $x_0 \in X$. L'application r définie sur X et constante égale à x_0 est une rétraction de X sur x_0. En revanche, x_0 est un rétracte par déformation de X si et seulement si X est contractile. Si par exemple X n'est pas connexe par arcs, alors il n'est pas contractile.

2. Tout point de P est un rétracte par déformation de P, puisque P est contractile. En revanche, les points de $\{0\} \times]0,1]$ ne sont pas des rétractes par déformation forte de P. En effet, soit $x = (0,\lambda) \in \{0\} \times]0,1]$, et soit $r : P \to \{x\}$ une rétraction par déformation forte. Alors par définition il existe une homotopie

$$H : P \times [0,1] \to P$$

telle que $H(\cdot,0) = \mathrm{id}_P$, $H(\cdot,1) = x$, et pour tout $t \in [0,1]$, $H(x,t) = x$.

L'espace $P \times [0,1]$ est compact, donc H est uniformément continue. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $y, z \in P$ et $t \in [0,1]$ tels que $|y - z| < \eta$, on ait $|H(y,t) - H(z,t)| < \epsilon$. On choisit $\epsilon < \lambda$, et n tel que $\frac{1}{n} < \eta$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, $H((\frac{1}{n},\lambda),t)$ appartient au disque D de centre x et de rayon ϵ.

On remarque que les points x et $(\frac{1}{n},\lambda)$ appartiennent à deux composantes connexes par arcs distinctes de $D \cap P$. Cependant, l'application $t \mapsto H((\frac{1}{n},\lambda),t)$ est un chemin continu de $(\frac{1}{n},\lambda)$ vers x, qui d'après ce qui précède, est entièrement contenu dans $D \cap P$. On aboutit donc à une contradiction.

Remarque : On peut également montrer que si on considère la variante

$$P' = ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{x \in \mathbf{Q} \cap [0,1]} \{x\} \times [0,1]$$

du peigne, alors les seuls points sur lesquels P' se rétracte par déformation forte sont ceux de sa base $[0,1] \times \{0\}$.

Exercice 6. Composantes connexes par arcs des espaces fonctionnels

On rappelle que la topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{C}(X,Y)$ est engendrée par les parties de la forme

$$V(K,U) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y),\ f(K) \subset U\}$$

où $K \subset X$ est compact et $U \subset Y$ est ouvert.

Le résultat de l'énoncé est immédiat une fois qu'on a montré le résultat général suivant :

Lemme Soient X, Y, Z des espaces topologiques, avec X localement compact. Alors on a une bijection bien définie

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}(X \times Z, Y) & \to & \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y)) \\ f & \mapsto & z \mapsto f_z \end{array}$$

où $f_z : X \to Y$ est l'application $x \mapsto f(x, z)$.

C'est un très bon exercice pour réviser la topologie compacte-ouverte ! Indication : commencer par montrer que l'application d'évaluation

$$\mathrm{ev} : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}(X, Y) \times X & \to & Y \\ (f, x) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est continue (on suppose toujours X localement compact).

Référence : Hatcher prop. A.14

Exercice 7. Lacets remplissant la sphère

1. Voir la question 5 de l'Exercice 1.
2. Oui : soit γ un lacet tel que $\gamma([0,1]) = S^n$. On considère le lacet $\gamma' : t \mapsto \gamma(1-t)$ (c'est-à-dire γ' parcouru à l'envers). Alors le lacet qui consiste à parcourir γ puis γ', donné par :
$$\gamma' \circ \gamma : t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma'(2(t - \frac{1}{2})) & \text{pour } t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
est homotope au lacet constant (voir cours sur le groupe fondamental).
3. Soit x un point quelconque de S^n, et soient les deux ouverts de S^n donnés par $U = S^n \setminus \{x\}$ et $V = S^n \setminus \{-x\}$. Par compacité de $[0,1]$, il existe une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = 1$ de $[0,1]$ telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, l'image $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ soit incluse dans U ou dans V. Soit par exemple i tel que $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ soit incluse dans U. Or U est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$, donc $\gamma_{|[a_i, a_{i+1}]}$ est homotope (relativement à a_i et a_{i+1}) à tout chemin reliant a_i et a_{i+1} et contenu dans U, par exemple un arc du grand cercle contenant a_i et a_{i+1}. Puisque $n \geq 2$, ce dernier est nulle part dense dans S^n.
4. D'après la question 3, tout lacet surjectif est homotope à un lacet non surjectif. La question 1. permet alors de conclure. Le résultat est faux pour $n = 1$: comme on le verra en cours, le lacet $t \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi t}$ dans le cercle S^1 n'est pas homotope au lacet constant (et donc à aucun lacet non surjectif).