TD : feuille n°3
Groupe fondamental

Exercice 1. Topologie grossière

Montrer que tout espace topologique grossier non vide est simplement connexe.

Exercice 2. Découpage

Trouver un espace topologique X et deux sous-ensembles U et V de X avec $U \cup V = X$, tels que les sous-ensembles U, V et $U \cap V$ soient simplement connexes, sans que X le soit.

Exercice 3. Groupe fondamental d'un produit

Soit $(X_i, x_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés. Montrer que les groupes

$$\pi_1 \left(\prod_{i \in I} X_i, (x_i)_{i \in I} \right) \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i)$$

sont isomorphes.

Exercice 4. Dimension

Montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour $n \neq 2$.

Exercice 5. Quelques calculs de groupe fondamental

1. Soit X un espace topologique et SX sa suspension (quotient de $X \times [0,1]$ obtenu en écrasant $X \times \{0\}$ d'une part et $X \times \{1\}$ d'autre part). Si X est connexe par arcs, montrer que SX est simplement connexe. Donner un contre-exemple si X n'est pas connexe par arcs.
2. Calculer le groupe fondamental de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 6. Groupe fondamental des groupes linéaires de taille 2

1. Montrer que l'application $SU_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ qui à une matrice associe sa première colonne induit un homéomorphisme entre $SU_2(\mathbb{C})$ et S^3.
2. En déduire le groupe fondamental des groupes topologiques $SU_2(\mathbb{C})$, $U_2(\mathbb{C})$ et $GL_2(\mathbb{C})$.
3. Calculer le groupe fondamental de $SO_2(\mathbb{R})$, de $GL_2(\mathbb{R})_+$ (composante connexe de $GL_2(\mathbb{R})$ formée des matrices de déterminant positif) et de $GL_2(\mathbb{R})_-$ (composante connexe de $GL_2(\mathbb{R})$ formée des matrices de déterminant négatif).

Exercice 7. Théorème fondamental de l'algèbre

Soit p un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout z de module R, on ait $|p(z) - z^n| < R^n$. En déduire que p admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8. Homotopie libre

Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs, et soit x un point de X. On appelle *lacet libre* dans X une application continue $f : [0,1] \to X$ telle que $f(0) = f(1)$. Deux lacets libres f_0 et f_1 sont dits *librement homotopes* s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$, on ait $H(t,0) = f_0(t)$, $H(t,1) = f_1(t)$ et $H(0,t) = H(1,t)$.

Montrer que l'ensemble des classes d'homotopie libre est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(X, x)$.

Exercice 9. Groupe fondamental d'un groupe topologique

On rappelle qu'un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie pour laquelle la multiplication et le passage à l'inverse sont continus. Soit G un groupe topologique connexe par arcs. Si $\alpha : [0,1] \to G$ et $\beta : [0,1] \to G$ sont deux lacets dans G basés en l'élément neutre $e \in G$, on note $\alpha * \beta$ leur concaténation, et on note $\alpha\beta$ le lacet défini par la multiplication point par point : $\alpha\beta(t) = \alpha(t)\beta(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Montrer que les lacets $\alpha * \beta$, $\beta * \alpha$ et $\alpha\beta$ sont deux à deux homotopes. En déduire que le groupe $\pi_1(G,e)$ est abélien.

Exercice 10. Théorème de Brouwer

Soit $n \geq 1$. On note $\bar{D}^n$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Le théorème de Brouwer dit que toute application continue $f : \bar{D}^n \to \bar{D}^n$ admet un point fixe.

1. Prouver le théorème pour $n = 1$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de rétraction $r : \bar{D}^2 \to S^1$.
3. En déduire le théorème pour $n = 2$.
4. Expliquer pourquoi le théorème de Brouwer est équivalent au résultat suivant : soit Δ^n un n-simplexe. Alors toute fonction $f : \Delta^n \to \Delta^n$ admet un point fixe.
5. (Lemme de Sperner en dimension 2) On considère une triangulation [1] (S,T) d'un 2-simplexe Δ^2 (que l'on voit comme un triangle $A_1A_2A_3$). Un *coloriage de Sperner* est une fonction $c : S \to \{1,2,3\}$ telle que
   - Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $c(A_i) = i$.
   - Pour tout $v \in S$ appartenant au côté A_iA_j, $c(v) \in \{i,j\}$.

   Montrer que pour tout coloriage de Sperner c il existe nécessairement un triangle $B_1B_2B_3 \in T$ tel que $c(\{B_1,B_2,B_3\}) = \{1,2,3\}$.
6. On se propose de donner une autre démonstration du théorème de Brouwer. Soit $f : \Delta^2 \to \Delta^2$ une fonction continue (supposée sans point fixe). Expliquer comment on peut utiliser f pour munir toute triangulation (S,T) de Δ^2 d'un coloriage de Sperner. En prenant des triangulations de diamètres de plus en plus petits, aboutir à une contradiction.

Exercice 11. Théorème de Borsuk-Ulam

Le théorème de Borsuk-Ulam dit que pour tout $n \geq 1$ et pour toute application continue $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

1. Prouver le théorème pour $n = 1$.
2. On souhaite montrer le théorème pour $n = 2$. On raisonne par l'absurde en définissant l'application $g : S^2 \to S^1$ définie par
$$g : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$
   Observer que $g(-x) = -g(x)$ et en déduire le théorème pour $n = 2$ en considérant la restriction $g_{|S^1} : S^1 \to S^1$.
3. Le théorème de Lusternik et Schnirelmann dit que si la sphère S^n est recouverte par $n+1$ fermés, alors l'un de ces fermés contient deux points antipodaux. Montrer ce théorème pour $n = 1$ et $n = 2$. Le nombre de fermés est-il optimal dans ces deux cas ?

1. Une triangulation de Δ^2 est la donnée d'un ensemble fini S de points de Δ^2 contenant les sommets de Δ^2, ainsi que d'un ensemble fini T de triangles de sommets appartenant à S, d'intérieurs disjoints, recouvrant Δ et telle que l'intersection de deux tels triangles soit ou bien vide, ou bien un côté de chacun des deux.