Corrigé feuille n°3
Groupe fondamental

Exercice 1. Homotopie libre

On note $L(X)$ l'ensemble des classes d'homotopie libre de X. Comme deux lacets homotopes sont bien entendu également librement homotopes, il y a une application bien définie

$$\pi_1(X,x) \to L(X)$$

envoyant la classe d'un lacet sur sa classe d'homotopie libre. Elle est sutjective : soit γ un lacet de base un point ,$y \in X$, et soit $\ell : [0,1] \to X$ un chemin de x vers y. Alors γ est librement homotope au chemin $\ell\gamma\ell^{-1}$ par l'homotopie :

$$H(s,t) = \begin{cases} \ell(t+4s(1-t)) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \gamma(4s-1) & \text{si} \quad \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \ell(t+(1-t)(2-2s)) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Nous devons montrer que cette application est constante sur les classes de conjugaison dans $\pi_1(X,x)$. Pour cela, on peut encore utiliser l'homotopie ci-dessus. L'application ci-dessus passe donc au quotient pour donner une application bien définie des classes de conjugaison dans $\pi_1(X,x)$ vers $L(X)$. Il suffit maintenant de montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire que deux lacets bases en x et librement homotopes sont conjugués dans $\pi_1(X,x)$.

Soient f_0 et f_1 deux lacets basés en x et librement homotopes, et soit $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ une homotopie libre telle que $H(\cdot,0) = f_0$ et $H(\cdot,1) = f_1$. On remarque que le chemin $\gamma : t \mapsto H(0,t)$ est un lacet basé en x. Nous allons construire une homotopie de lacets entre f_0 et $\gamma f_1 \gamma^{-1}$. A temps t, cette homotopie parcourt le lacet γ de 0 à t, puis parcourt le lacet $H(\cdot,t)$, puis reparcourt γ de t à 0. Une telle homotopie est donnée par exemple par :

$$H(s,t) = \begin{cases} H(0,4st) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ H(4s-1,t) & \text{si} \quad \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H(0,t\,(2-2s)) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Remarque : une autre manière de voir qu'un lacet et son conjugué sont librement homotopes : soient α, β deux lacets. On rappelle que par définition $\alpha\beta$ est le lacet γ qui parcourt tout α pendant une moitié du temps ($s \in [0,1/2]$), et β pendant l'autre moitié du temps ($s \in [1/2,1]$). On construit une homotopie libre entre $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ de la manière suivante : à l'instant t, l'application $H(\cdot,t)$ commence à parcourir α de t à 1, ensuite parcourt β, et puis parcourt α de 0 à t.

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\beta(s+\frac{t}{2}) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \alpha\beta\left(s-1+\frac{t}{2}\right) & \text{si} \quad \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tous lacets f et γ, $\gamma f \gamma^{-1}$ est librement homotope à f.

Exercice 2. Topologie grossière

Soit $X \neq \emptyset$ un espace topologique grossier, et soit $x_0 \in X$. Soit $\gamma : [0,1] \to X$ un lacet basé en x_0. On considère une application $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $H(0,t) = \gamma(t)$ et $H(1,t) = x_0$ (et pour tout $x \in]0,1[$, $H(x,\cdot) =$ ce qu'on veut). Puisque X est grossier, H est continue quelles que soient les valeurs qu'elle prend, donc elle définit une homotopie entre γ et le lacet constant basé en x_0.

Exercice 3. Découpage

Exercice 4. Groupe fondamental d'un groupe topologique

Soit $L(G,e)$ l'ensemble des lacets de G basés en e. On commence par vérifier que l'application

$$\begin{array}{ccc} L(G,e)\times L(G,e) & \to & L(G,e) \\ (\alpha,\beta) & \mapsto & \alpha\beta \end{array}$$

passe au quotient pour donner une application $\pi_1(G,e)\times\pi_1(G,e)\to\pi_1(G,e)$. Pour cela, on remarque que si α et α' (respectivement β et β') sont deux lacets homotopes, et H (resp. I) est une homotopie de α vers α' (resp. de β vers β'), alors l'application $(s,t)\mapsto H(s,t)I(s,t)$ est une homotopie de $\alpha\beta$ vers $\alpha'\beta'$.

On note maintenant e le lacet constant égal à e. Alors par définition de la concaténation, pour tout $\alpha,\beta\in L(G,e)$, on a l'égalité $(\alpha*e)(e*\beta)=\alpha*\beta$. De même, nous avons $(e*\alpha)(\beta*e)=\beta*\alpha$. D'autre part, puisque $\alpha*e$ et $e*\alpha$ sont homotopes à α, et $\beta*e$ et $e*\beta$ sont homotopes à β, nous obtenons que $\alpha\beta$ est homotope aussi bien à $\alpha*\beta$ qu'à $\beta*\alpha$. On en conclut que l'application $\pi_1(G,e)\times\pi_1(G,e)\to\pi_1(G,e)$ ci-dessus coïncide avec la loi de groupe usuelle, et que de plus cela rend cette loi de groupe commutative.

Exercice 5. Groupe fondamental d'un produit

Exercice 6. Dimension

Pour montrer que $\mathbf{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}$, il suffit de remarquer qu'en enlevant un point à $\mathbf{R}$ on obtient un espace non connexe par arcs, alors que $\mathbf{R}^2$ privé d'un point reste connexe par arcs.

Cette stratégie n'est pas suffisante pour comparer $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$ pour $n\geq 3$, mais on peut s'en inspirer en comparant plutôt les groupes fondamentaux : $\mathbf{R}^2$ privé d'un point est homotope à S^1, donc a un groupe fondamental non-trivial, alors que $\mathbf{R}^n$, privé d'un point est homéomorphe à S^{n-1}, qui est simplement connexe pour $n\geq 3$.

Exercice 7. Groupe fondamental des groupes linéaires de taille 2

1. On sait que $SU_2(\mathbf{C})$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -\bar b \\ b & \bar a\end{pmatrix}$ avec $|a|^2+|b|^2=1$. On obtient donc un homéomorphisme avec S^3 en envoyant chaque matrice sur sa première colonne.
2. D'après la première question, $SU_2(\mathbf{C})$ est simplement connexe puisque S^3 l'est. Ensuite, on a un homéomorphisme
$$SU_2(\mathbf{C})\times S^1\to U_2(\mathbf{C})$$
qui à un couple (M,z) associe la matrice $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}M$. Donc $\pi_1(U_2(\mathbf{C}))\simeq\pi_1(S^1)\simeq\mathbf{Z}$.
Pour finir, $GL_2(\mathbf{C})$ se rétracte par déformation sur $U_2(\mathbf{C})$ (adapter la question 2 de l'exercice 2 du TD précédent), donc son groupe fondamental est $\mathbf{Z}$ également.
Attention : l'homéomorphisme que nous avons donné n'est pas un morphisme de groupes. En fait, on a une suite exacte courte
$$1\to SU_2(\mathbf{C})\longrightarrow U_2(\mathbf{C})\xrightarrow{\det} S^1\to 1,$$
qui est scindée par l'application $z\mapsto\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, donc en tant que groupe, $U_2(\mathbf{C})$ est isomorphe est un produit semi-direct de $SU_2(\mathbf{C})$ avec S^1 (mais qui n'est pas direct !). En revanche, comme l'espace topologique sous-jacent est quand même le produit des espaces topologiques $SU_2(\mathbf{C})$ et S^1, cet isomorphisme induit l'homéomorphisme ci-dessus.

3. En utilisant la même méthode que pour $SU_2(\mathbf{C})$, on trouve que $\pi_1(SO_2(\mathbf{R})) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbf{Z}$. Comme on a vu dans le TD 2, le groupe $GL_2(\mathbf{R})$ se rétracte par déformation sur $O_2(\mathbf{R})$. Cette rétraction conserve le signe du déterminant, et donc $GL_2^+(\mathbf{R})$ se rétracte par déformation sur $SO_2(\mathbf{R})$. Par conséquent, $\pi_1(GL_2^+(\mathbf{R})) \simeq \pi_1(S0_2(\mathbf{R})) \simeq \mathbf{Z}$.

   Enfin, la multiplication par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ induit un homéomorphisme entre $GL_2^+(\mathbf{R})$ et $GL_2^-(\mathbf{R})$, donc $\pi_1(GL_2^+(\mathbf{R})) \simeq \mathbf{Z}$.

Exercice 8. Quelques calculs de groupes fondamentaux

Les deux questions utilisent le théorème de van Kampen faible : si X est connexe par arcs et s'écrit $X = U \cup V$ avec U et V deux ouverts non-vides simplement connexes tels que $U \cap V$ soit non-vide et connexe par arcs, alors X est simplement connexe.

1. Par définition, on peut écrire $\Sigma X = C^+X \cup C^-X$, où
$$C^+X := X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]/X \times \{0\}, \quad C^-X := X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]/X \times \{1\}.$$
   Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on va noter C_ε^+X (resp. C_ε^-X) un ε-voisinage ouvert de C^+X (resp. C^-X). On remarque que C^+X et C^-X sont des cônes, donc sont contractiles. En particulier, les ouverts C_ε^+X et C_ε^-X, qui se rétractent par déformation sur ces derniers, sont simplement connexes. De plus, $X_\varepsilon := C_\varepsilon^+X \cap C_\varepsilon^-X$ se rétracte par déformation sur X, qui est connexe par arcs, et donc on peut appliquer le résultat précédent.

2. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $\mathbf{CP}^0$ est un point, donc est bien simplement connexe. On suppose le résultat vrai pour un $n \geq 0$. On sait que $\mathbf{CP}^{n+1}$ est obtenu à partir de $\mathbf{CP}^n$ par recollement d'une $2n+2$-cellule D. Il suffit donc de prendre pour U et V, un ε-voisinage de $\mathbf{CP}^n$ à l'intérieur de $\mathbf{CP}^{n+1}$ d'une part, et un ε-voisinage de la cellule recollée d'autre part. Les deux sont simplement connexes, le premier par hypothèse de récurrence, et le deuxième car D est contractile donc simplement connexe. L'intersection se rétracte par déformation sur le bord de D, qui est S^{2n+1}. Puisque $n \geq 0$, S^{2n+1} est connexe par arcs, donc on peut conclure.

Exercice 9. Théorème fondamental de l'algèbre

La première question est immédiate, et implique, comme dans l'exercice 1 de la feuille précédente, que les applications $t \mapsto p(Re^{2i\pi t})$ et $t \mapsto Re^{2i\pi t}$ définies sur l'ensemble des complexes de module R sont homotopes dans $\mathbf{C}^*$. On suppose que p n'a pas de racines, et définit donc une application continue $p : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$.

— Le lacet $t \mapsto Re^{2i\pi t}$ est homotope au lacet trivial dans $\mathbf{C}$, donc son image $t \mapsto p(Re^{2i\pi t})$ par p est homotope au lacet trivial dans $\mathbf{C}^*$.

— D'autre part, le lacet $t \mapsto Re^{2i\pi t}$ n'est pas homotope au lacet trivial dans $\mathbf{C}^*$.

On aboutit donc à une contradiction.

Exercice 10. Théorème de Brouwer

1. C'est une conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

2. On rappelle qu'une telle rétraction est une application continue $r : D^2 \to S^1$ telle que, si $i : S^2 \to D^2$ est l'inclusion, on a $r \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$. Les applications i et r induisent alors des morphismes de groupes
$$\pi_1(S^1) \to \pi_1(D^2) \to \pi_1(S^1)$$
   dont la composée est l'identité, ce qui est impossible puisque $\pi_1(S^1)$ n'est pas trivial alors que $\pi_1(D^2)$ l'est.

3. On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe $f : D^2 \to D^2$ sans point fixe. On construit alors une rétraction $r : D^2 \to S^1$ de la manière suivante : pour tout x, on définit $r(x)$ comme l'intersection de $\partial D^2 = S^1$ avec la demi-droite $[x, f(x)[$. Cette opération est continue car $r(x)$ peut s'exprimer par des formules variant continûment en fonction des coordonnées de x et $f(x)$. On conclut en utilisant la question précédente.
4. Il existe un homéomorphisme $h : D^n \to \Delta^n$. Ainsi, si $f : \Delta^n \to \Delta^n$ n'admet pas de point fixe, il en est de même pour $h^{-1} \circ f \circ h : D^n \to D^n$.
5. On appelle *face* de la triangulation chaque triangle de la triangulation, ainsi que le domaine à l'extérieur du triangle. On définit un graphe planaire de la manière suivante : l'ensemble des sommets est l'ensemble des faces. On relie deux sommets si les faces correspondantes ont une arête en commun dont une extrémité est de couleur 1 et l'autre de couleur 2. On appelle *degré* d'un sommet le nombre d'arêtes qui en partent. Puisque A_1 et de couleur 1, A_2 est de couleur 2, et tout sommet de la triangulation appartenant au segment $[AB]$ est de couleur 1 ou 2, le segment $[A_1A_2]$ contient un nombre impair d'arêtes dont les extrémités sont de couleurs différentes. Ainsi, la face extérieure est de degré impair.

   On rappelle le lemme des poignées de mains : pour tout graphe sans boucles (les extrémités d'une arête sont toujours distinctes) (V, E), où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes, on a
   $$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|,$$
   où $d(v)$ est le degré du sommet v. En effet, dans la somme à gauche, une arête reliant deux sommets v et v' est comptée une fois dans le terme $d(v)$, et une autre fois dans le terme $d(v')$. Cette formule implique que le nombre de sommets de degré impair est pair.

   Ainsi, en appliquant cela à notre graphe, on voit qu'il existe un nombre impair de faces autres que la face extérieure qui sont de degré impair. Or, pour une face triangulaire, être de degré impair signifie exactement que les trois sommets sont de couleurs différentes.

   Nous avons donc prouvé un résultat un peu plus fort : pour tout coloriage de Sperner, il existe un nombre impair (et donc en particulier non-nul) de triangles ayant leurs trois sommets de couleurs différentes.
6. Chaque point $v \in \Delta^2$ est repéré de manière unique par ses coordonnées barycentriques (a, b, c) : ce sont des réels positifs, de somme 1, tels que $v = aA_1 + bB_2 + cC_2$. On note $f(v) = (a', b', c')$ (en coordonnées barycentriques également) et on colorie v de la manière suivante :
   — Si $a > a'$, on pose $c(v) = 1$
   — Si $a \leq a'$ et $b > b'$, on pose $c(v) = 2$
   — Si $a \leq a'$, $b \leq b'$ mais $c > c'$, on pose $c(v) = 3$.

   Si on suppose que f n'a pas de point fixe, alors v est nécessairement dans l'un des cas de figure ci-dessus, et on peut le colorier. On considère une suite de triangulations $(S_k, T_k)_{k \geq 0}$ dont le diamètre (c'est-à-dire le maximum des diamètres des triangles) converge vers zéro. Pour tout k, on note $B_{1,k}B_{2,k}B_{3,k}$ un triangle tricolore de la triangulation T_k : on suppose que $c(B_{i,k}) = i$ pour $i = 1, 2, 3$. Par compacité, quitte à extraire on peut supposer que les suites $B_{1,k}$, $B_{2,k}$ et $B_{3,k}$ convergent. Puisque le diamètre du triangle $B_{1,k}B_{2,k}B_{3,k}$ tend vers 0, ces suites ont la même limite C. Soient (a, b, c) les coordonnées barycentriques de C, et (a', b', c') celles de $f(C)$. Alors
   — Puisque $B_{1,k} \to C$, on a $a \geq a'$.
   — Puisque $B_{2,k} \to C$, on a $a \leq a'$ et $b \geq b'$.
   — Puisque $B_{3,k} \to C$, on a $b \leq b'$ et $c' \geq c$.

   Ainsi, nous avons $a = a'$, $b = b'$, et puisque $a + b + c = a' + b' + c' = 1$, aussi $c = c'$, donc C est un points fixe de f.

Exercice 11. Théorème de Borsuk-Ulam

1. Utiliser le TVI.

2. On observe en effet que g est impaire, c'est-à-dire que $g(-x) = -g(x)$. Nous allons montrer que cela implique que le degré du lacet donné par la restriction $h = g_{|S^1}$ est impair. Nous allons voir h comme une application $h : I \to S^1$ telle que $h(x + \frac{1}{2}) = -h(x)$. Soit $\tilde{h} : I \to \mathbf{R}$ un relèvement de h. Alors la condition sur h implique que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$\exp\left(2i\pi\tilde{h}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = -\exp\left(2i\pi\tilde{h}(x)\right) = \exp\left(2i\pi\left(\tilde{h}(x) + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \tilde{h}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \tilde{h}(x) - \frac{1}{2}$ est continue et prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}$. Elle est donc constante égale à un certain entier m. Alors

$$\tilde{h}(1) = \tilde{h}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + m = \tilde{h}(0) + 2m + 1$$

et le degré $\tilde{h}(1) - \tilde{h}(0)$ est bien impair.

En particulier, h n'est pas homotope au lacet trivial.

L'application g induit un morphisme de groupes $g_* : \pi_1(S^2) \mapsto \pi_1(S^1)$. Le groupe de départ est trivial, alors que le groupe d'arrivée de l'est pas. Soit $\alpha : S^1 \to S^2$ le lacet donné par l'inclusion de l'équateur dans S^2. Alors $h = g_*\alpha$, ce qui montre que l'image du morphisme g_* n'est pas triviale, et apporte une contradiction.

3. Soient $F_1, \ldots, F_{n+1}$ les fermés en question On considère les fonctions $d_1, \ldots, d_n$ données par les distances à n d'entre eux. D'après le théorème de Borsuk-Ulam, il existe deux points antipodaux y et $-y$ donnant la même valeur à la fonction

$$x \mapsto (d_1(x), \ldots, d_n(x))$$

S'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $d_i(y) = d_i(-y) = 0$, alors y et $-y$ appartiennent à F_i. Sinon, cela veut dire qu'ils appartiennent tous les deux à F_{n+1}.

Le nombre de fermés est optimal dans les deux cas $n = 1$ et $n = 2$: on inscrit le cercle S^1 dans un triangle équilatéral. On projette ensuite le triangle sur le cercle, en associant à chaque point du triangle l'unique point d'intersection du cercle avec la demi-droite d'origine le centre du cercle et passant par ce point. Cela détermine trois fermés sur le cercle, et aucun de ces fermés ne contient deux points antipodaux. Pour $n = 2$, on fait pareil avec un tétraèdre.