TD : feuille n°4
Revêtements et groupe fondamental

1 Généralités sur les revêtements

Exercice 1. Quelques propriétés

Soit $p : E \to B$ un revêtement.

1. On suppose que B est connexe et localement connexe. Montrer que pour toute composante connexe C de E, la restriction $p_{|C} : C \to B$ est un revêtement.
2. Soit $p : E \to B$ un revêtement à fibres finies. Montrer que pour tout revêtement $q : X \to E$, l'application $p \circ q$ est un revêtement.
3. On suppose que E est connexe par arcs et que p n'est pas un homéomorphisme. Montrer que B n'est pas simplement connexe.
4. On suppose que p est un revêtement à deux feuillets. Montrer qu'il admet un automorphisme non-trivial, c'est-à-dire qu'il existe des applications continues $f, g : E \to E$ différentes de l'identité, telles que $p \circ f = p = p \circ g$, et telles que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$. Donner un exemple de revêtement à trois feuillets qui n'admette pas d'automorphisme non-trivial.

Exercice 2. Homéomorphismes locaux

1. Donner un exemple d'un homéomorphisme local surjectif qui ne soit pas un revêtement.
2. Donner un exemple d'un homéomorphisme local surjectif qui ne satisfait pas la propriété de relèvement des chemins.
3. Soit $p : E \to B$ un homéomorphisme local avec E séparé.
   (a) On suppose que toutes les fibres de p sont finies de même cardinal non-nul. Montrer que p est un revêtement. Est-ce toujours vrai si les fibres ne sont plus supposées de cardinal fini ?
   (b) On suppose que B est connexe et que p est propre, c'est-à-dire qu'elle est fermée et que l'image réciproque de tout singleton est compacte. Montrer que p est un revêtement.
4. Soit P un polynôme complexe de degré $n > 0$. Soit $Z \subset \mathbf{C}$ l'ensemble des racines du polynôme dérivé P', et $A = P(Z) \subset \mathbf{C}$. Montrer que l'application $P_{|\mathbf{C} \setminus P^{-1}(A)} : \mathbf{C} \setminus P^{-1}(A) \to \mathbf{C} \setminus A$ est un revêtement à n feuillets.

Exercice 3. Exemples de revêtements

1. Montrer que l'application quotient $S^n \to \mathbf{RP}^n$ est un revêtement. Combien a-t-il de feuillets ?
2. Soit $p : \mathbf{R} \to S^1$ l'application exponentielle $x \mapsto e^{2i\pi x}$. A quelle condition sur A un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ la restriction $p_{|A} : A \to S^1$ est-elle un revêtement ?
3. Dessiner tous les revêtements à 2 feuillets du bouquet de deux cercles.
4. Construire un revêtement du ruban de Moebius par un cylindre. En existe-t-il un avec un nombre impair de feuillets ?
5. Construire un revêtement non-trivial du ruban de Moebius par lui-même. En existe-t-il un avec un nombre pair de feuillets ?

6. La bouteille de Klein K est l'espace topologique obtenu comme quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x,0) \sim (1-x,1)$ et $(0,y) \sim (1,y)$. Construire un revêtement de la bouteille de Klein par $\mathbf{R}^2$, puis par le tore.
7. Donner un revêtement non-trivial du groupe unitaire $U(n)$.
8. Donner un revêtement non-trivial de l'espace topologique X obtenu comme réunion de la sphère S^2 avec l'un de ses diamètres.

Exercice 4. Produit de revêtements

Soient $p : E \to B$ et $p : E' \to B'$ des revêtements. Montrer que $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ est un revêtement. Un produit infini de revêtements est-il toujours un revêtement ?

Exercice 5. Tiré en arrière d'un revêtement

Soit $p : E \to B$ un revêtement, et $f : X \to B$ une application continue. On note $f^*(X)$ le sous-espace topologique de $X \times E$ défini par $f^*(X) = \{(x,e) \in X \times E,\ f(x) = p(e)\}$, appelé le *produit fibré* de X et E au-dessus de B. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f^*(p) : & f^*(X) & \to & X \\ & (x,e) & \mapsto & x \end{array}$$

est un revêtement.

Exercice 6. Actions de groupes

Soit X un espace topologique localement compact sur lequel un groupe discret G agit continûment. On fait les deux hypothèses suivantes :

(i) L'action de G est libre, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$, on a $g \cdot x = x$ si et seulement si $g = e$.

(ii) L'action de G est propre, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble
$$\{g \in G,\ K \cap gK \neq \emptyset\}$$
est fini.

Montrer alors que l'application quotient $p : E \to E/G$ est un revêtement, et que E/G est séparé.

Exercice 7. Revêtement à nombre infini de feuillets

Soit X un espace topologique qui s'écrit comme union de deux ouverts connexes U et V. Montrer que si l'intersection $U \cap V$ n'est pas connexe, alors X admet un revêtement connexe avec un nombre infini de feuillets.

2 Revêtements et groupe fondamental

Exercice 8. Classification complète

Décrire (à isomorphisme près), en précisant le nombre de feuillets, tous les revêtements connexes

(a) de l'espace projectif $\mathbf{RP}^n$ pour $n \geq 2$.

(b) du tore.

(c) du ruban de Moebius.

Exercice 9. Bouquets de cercles

Soit $k \geq 1$ un entier.

1. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements connexes à 2 feuillets du bouquet de k cercles ?
2. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements galoisiens à 3 feuillets du bouquet de k cercles ?
3. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements à 3 feuillets du bouquet de 2 cercles ? Les dessiner.

Exercice 10. Espace de groupe fondamental fini

Soit X un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs de groupe fondamental fini. Montrer que toute application continue $X \to S^1$ est homotope à une application constante.

Exercice 11. Espaces topologiques finis

1. Montrer que tout espace topologique fini et connexe par arcs de cardinal 2 ou 3 est simplement connexe.
2. On considère l'espace topologique X de cardinal 4 donné par l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ avec pour base d'ouverts
$$\{\{a\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\} .$$
Montrer que X n'est pas simplement connexe en en construisant un revêtement non-trivial. Déterminer le groupe fondamental de X, et tous les espaces topologiques connexes par arcs qui revêtent X.
3. Construire un espace topologique fini connexe par arcs dont le groupe fondamental ne soit pas abélien.

Exercice 12. Graphes et groupes libres

On appelle *graphe fini* un CW-complexe fini de dimension 1. Autrement dit, un graphe fini est la donnée d'un ensemble fini de sommets S, et d'un ensemble fini d'arêtes A, tel que l'intersection de chaque arête avec l'ensemble S soit exactement l'ensemble des extrémités de cette arête.

1. Montrer que tout revêtement à fibres finies d'un graphe fini est encore un graphe fini.
2. On appelle caractéristique d'Euler d'un graphe fini connexe X l'entier $\chi(X) = \#S - \#A$. Montrer que le graphe X est homotope au bouquet de $1 - \chi(X)$ cercles.
3. Soit L un groupe libre à $n \geq 1$ générateurs, et H un sous-groupe d'indice k de L. Montrer que H est un groupe libre, dont on donnera le nombre de générateurs.
4. Soit $n \geq 3$. Montrer que le groupe libre à 2 générateurs admet un sous-groupe isomorphe au groupe libre à n générateurs. Donner des générateurs d'un tel sous-groupe pour $n = 3$.

3 Groupe fondamental et théorème de van Kampen

Exercice 13. Quelques calculs de groupe fondamental

1. Calculer le groupe fondamental du bouquet d'un ensemble quelconque de cercles.
2. Calculer le groupe fondamental du cercle à deux origines, et celui de la droite à deux origines.

Exercice 14. Groupe fondamental de la bouteille de Klein

1. Montrer que la bouteille de Klein est homéomorphe à la réunion de deux rubans de Moebius collés le long de leur bord (c'est à dire au quotient de $M_1 \sqcup M_2$ par l'identification $x = \phi(x)$, où ϕ est l'application identité de ∂M_1 dans ∂M_2.
2. Montrer que le groupe fondamental de K est le quotient du groupe libre à deux générateurs a et b par la relation $a^2 = b^2$.
3. En déduire que la bouteille de Klein n'a pas le même type d'homotopie que le tore.

Exercice 15. Bouquet de deux plans projectifs

1. Déterminer le groupe fondamental du bouquet de deux plans projectifs $\mathbf{RP}^2 \vee \mathbf{RP}^2$, et en donner un revêtement universel.
2. Décrire, à isomorphisme près, tous les revêtements connexes de $\mathbf{RP}^2 \vee \mathbf{RP}^2$.

Exercice 16. Complémentaire de deux espaces affines

Soit n un nombre entier strictement positif, et soient A_1 et A_2 deux sous-espaces affines de codimension ≥ 2 dans $\mathbf{R}^n$ tels que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Quel est le groupe fondamental du complémentaire de $A_1 \cup A_2$ dans $\mathbf{R}^n$ (on discutera suivant les codimensions de A_1 et A_2) ?

Exercice 17. Surface de genre g

Soit $g \geq 1$ un entier. Calculer le groupe fondamental de la surface orientable S_g de genre g.