TD : feuille n°4
Revêtements et groupe fondamental

1 Généralités sur les revêtements

Exercice 1. Quelques propriétés

Exercice 2. Homéomorphismes locaux

1.
2.
3. (a) Pour un contre-exemple dans le cas où les fibres ne sont plus supposées de cardinal fini, cf par exemple l'exercice 3 question 2, en prenant A un ouvert de $\mathbf{R}$ approprié.

   (b) Surjectivité : observer que l'image est fermée et ouverte.

   L'image de tout singleton est compacte et discrète, donc finie. Pour trouver un ouvert trivialisant de $b \in B$, choisir des voisinages $U_1, \ldots, U_n$ disjoints de ses antécédents. Montrer que $V = B \setminus p(X \setminus \cup_{i=1}^n U_i)$ est ouvert, et est un ouvert trivialisant de b.
4. Utiliser 3.(a).

Exercice 3. Exemples de revêtements

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7. Regarder $SU(n) \times S^1 \to U(n)$ défini par $(M, z) \mapsto zM$.

Exercice 4. Produit de revêtements

Montrer qu'un produit infini de copies du revêtement $\mathbf{R} \to S^1$ n'est pas un revêtement.

Exercice 5. Tiré en arrière d'un revêtement

Soit $b \in B$, et U un voisinage de b trivialisant p, et soit F la fibre au-dessus de b, de sorte qu'on ait un homéomorphisme $\phi : f^{-1}(U) \to U \times F$.

Montrer que $f^{-1}(U)$ est trivialisant pour $f^*(p)$: on a un homéomorphisme

$$f^*(p)^{-1}(f^{-1}(U)) \to f^{-1}(U) \times F$$

en envoyant $(x, e) \in f^*(p)^{-1}(f^{-1}(U))$ sur $(x, \mathrm{pr}_2 \circ \phi(e))$, où $\mathrm{pr}_2 : U \times F \to F$ est la projection.

Exercice 6. Actions de groupes

On va montrer que le groupe agit totalement discontinûment. Soit $x \in X$, et soit K un voisinage compact de x. Écrire $\{g_1, \ldots, g_n\} = \{g \in G, gK \cap K \neq \emptyset\}$. Prendre des voisinages $U_1, \ldots, U_n$ disjoints de $g_1 x, \ldots g_n x$, et montrer que

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(U_i)$$

convient.

Pour le caractère séparé, soient $x, x' \in X$ tels que $p(x) = p(x')$. On veut construire des voisinages V et V' de x et x' tels que pour tout $g, g' \in G$, $gV \cap g'V' = \emptyset$. On commence par choisir un voisinage U de x tel que $gU \cap U = \emptyset$ pour tout $g \neq e$, et de même un voisinage U' de x'.

1. Montrer que quitte à réduire U', on peut supposer qu'il ne contient aucun point de l'orbite de x.
2. Montrer que quitte à réduire U, on peut supposer qu'il n'intersecte aucun gV, $g \in G$. Conclure.

Exercice 7. Revêtement à nombre infini de feuillets

On écrit $U \cap V$ comme une union disjointe de deux ouverts non-vides C_0 et C_1. Considérer le sous-espace de $X \times \mathbf{Z}$ défini par

$$Y = \{(x,k), x \in U,\ k \text{ pair}\} \cup \{(x,k), x \in V, k \text{ impair}\},$$

que l'on quotiente par les relations

$$(x,k) \sim (x, k-1) \text{ si } x \in C_0,\ k \text{ pair}$$

et

$$(x,k) \sim (x, k-1) \text{ si } x \in C_1,\ k \text{ impair}$$

(faire un dessin). Montrer que l'espace obtenu, avec l'application induite par la projection $X \times \mathbf{Z} \mapsto X$, donne bien un revêtement de X.

2 Revêtements et groupe fondamental

Exercice 8. Classification complète

Exercice 9. Bouquets de cercles

Voir `http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf` page 60

Exercice 10. Espace de groupe fondamental fini

Utiliser la finitude du groupe fondamental de X pour montrer qu'on peut relever $f : X \to S^1$ en une application $\tilde{f} : X \to \mathbf{R}$ telle que $\exp \circ \tilde{f} = f$.

Exercice 11. Espaces topologiques finis

1. Il y a trois topologies possibles sur un ensemble à deux éléments : la topologie discrète, la topologie grossière, et la topologie pour laquelle un des deux éléments de l'ensemble constitue un ouvert. Le premier n'est pas connexe, mais les deux autres sont même connexes par arcs (le vérifier !). Celui avec la topologie grossière est simplement connexe d'après l'exercice 2 de

la feuille 3. Soit maintenant $X = \{a, b\}$ un espace dont les ouverts sont $\emptyset$, $\{a\}$ et $\{a, b\}$. Pour tout $t \in [0,1]$ soit $s \mapsto \gamma_t(s)$ le lacet qui envoie $[0, \frac{s}{2}] \cup [1 - \frac{s}{2}, 1]$ sur b et $]\frac{s}{2}, 1 - \frac{s}{2}[$ sur a. Alors l'application $H : (s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ fournit une homotopie de γ_0 vers γ_1, qui est le lacet constant égal à b. Vérifier que le fait que γ_0 soit homotopiquement trivial implique que X est simplement connexe.

Ces idées permettent également de traiter le cas des ensembles de cardinal 3.

2. S'inspirer de l'exercice 7 pour construire un revêtement de fibre isomorphe à $\mathbf{Z}$, et montrer qu'il est simplement connexe (utiliser la simple connexité des espaces topologiques de 3 éléments).
3. Construire un espace bien choisi à 5 éléments à partir du précédent, recouvert par deux ouverts avec la même topologie que le précédent, et utiliser Van Kampen.

Exercice 12. Graphes et groupes libres

3 Groupe fondamental et théorème de van Kampen

Exercice 13. Quelques calculs de groupe fondamental

1.
2. Le groupe fondamental de la droite à deux origines, que l'on va noter $D_{:}$, est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Deux preuves possibles :
   - Soit C un cercle, x, x' deux points diamétralement opposés du cercle, et $U = C \setminus \{x'\}$. On choisit un homéomorphisme $\phi : U \to \mathbf{R}$ tel que $\phi(x) = 0$, et on recolle C sur $D_{:}$ en recollant U sur le complémentaire d'une des deux origines, suivant ϕ. L'intersection est homéomorphe à $\mathbf{R}$, contractile, et l'union homéomorphe au cercle à deux origines : le théorème de Van Kampen fournit alors
   $$\pi_1(D_{:}, x) * \mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z} * \mathbf{Z}.$$
   Dès lors, $\pi_1(D_{:}, x)$ est un groupe libre et en abélianisant on voit qu'il est de rang 1.
   - On peut aussi utiliser une déformation d'homotopie pour se ramener au groupe fondamental d'un cercle. Soient H^+, H^- les demi-plans fermés supérieur et inférieur respectivement. On note L^+, L^- les bords de H^+, H^-, ainsi que O^+, O^- les origines de L^+, L^-, et x^+, x^- les coordonnées de L^+, L^- respectivement. Comme H^+ (resp. H^-) se rétracte par déformation sur L^+ (resp. L^-), on sait que le groupe fondamental de la droite à deux origines est isomorphe à celui de $H^+ \coprod H^- / \{x^+ \sim x^-,\ x \neq 0\}$. On remarque que l'inclusion $H^+ \setminus \{O^+\} \hookrightarrow H^+$ est une équivalence d'homotopie. Donc on a
   $$\pi_1(D_{:}, x) = \pi_1\Big(\Big(H^+ \setminus \{O^+\}\Big) \coprod \Big(H^- \setminus \{O^-\}\Big) \Big/ \{x^+ \sim x^-;\ x \neq 0\}, x\Big).$$
   Or l'espace à droite est $\mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$, dont le groupe fondamental est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

Exercice 14. Groupe fondamental de la bouteille de Klein

Exercice 15. Bouquet de deux plans projectifs

1. Une application directe de Van Kampen donne $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
2. Pour simplifier l'exposition, on colorie un des deux plans projectifs en rouge, et l'autre en bleu. Soient a et b les deux générateurs du groupe fondamental, a celui correspondant au plan projectif rouge, et b celui correspondant au plan projectif bleu.

Puisque a et b sont d'ordre 2, on a $(ab)^{-1} = ba$. On note $c = ab$. Ainsi, tout mot réduit de longueur paire en a et b est de la forme c^n pour $n \in \mathbf{Z}$. Quant aux mots de longueur impaire, ils sont de la forme $c^n ac^{-n}$ ou $c^{-n}bc^n$ ou $c^n(aba)c^{-n}$ ou $c^{-n}(bab)c^n$ pour $n \geq 0$. Mieux : puisque $aba = cbc^{-1}$ et $bab = c^{-1}ac$, tout mot impair est en fait de la forme $c^n ac^{-n}$ ou $c^n bc^{-n}$.

Soit H un sous-groupe de $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Nous avons plusieurs cas à distinguer :

(a) H est trivial

(b) H est contenu dans le sous-groupe $\langle c \rangle$ engendré par c. Ainsi, il est engendré par c^m pour un certain $m \geq 1$, et est donc d'indice $2m$ dans G.

(c) $H \cap \langle c \rangle = \{1\}$. Alors H contient un unique mot de longueur impaire, et est d'ordre 2. Quitte à remplacer H par un sous-groupe conjugué, on peut supposer que ce mot est a ou b.

(d) H n'est pas contenu dans $\langle c \rangle$, et l'intersection $H \cap \langle c \rangle$ est non-triviale. Ainsi, H contient un certain c^m, et quitte à conjuguer par une puissance de c, on peut supposer que H contient a ou b. Si $m = 2k+1$ est impair, on remarque que $ac^m = b(ab)^{2k} = (ab)^{-k}b(ab)^k$, et donc les sous-groupes $\langle a, c^m \rangle$ et $\langle b, c^m \rangle$ sont conjugués. En revanche, si m est pair, leurs classes de conjugaison sont distinctes (cf. les revêtements distincts obtenus plus bas).

Les revêtement correspondant à ces classes de conjugaison de sous-groupes sont :

(a) On considère l'espace topologique obtenu comme union d'une sphère de centre $(k, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Si on colorie toutes les sphères « paires » en rouge et les sphères « impaires » en bleu, on obtient un revêtement en envoyant les sphères bleues sur la partie bleue de $\mathbf{RP}^2 \vee \mathbf{RP}^2$ et les sphères rouges sur la partie rouge. Cet espace est bien le revêtement universel car il est simplement connexe, comme on peut le voir par exemple en appliquant Van Kampen. Notons que tout élément de G induit un automorphisme de ce revêtement : l'élément a envoie la sphère k sur la sphère $-k$ par l'application antipodale, et l'élément b envoie la sphère $1+k$ sur la sphère $1-k$ par l'application antipodale. Par conséquent, l'élément ab agit comme la translation qui envoie la sphère k sur la sphère $k+2$ (par l'application identité).

(b) Le revêtement correspondant doit être de degré $2m$. On l'obtient en identifiant dans le revêtement précédent la sphère correspondant à l'entier k avec celle correspondant à l'entier $k+2m$, pour tout m, de sorte à obtenir un « collier » de $2m$ sphères, les paires étant bleues et les impaires étant rouges.

(c) Si $H = \langle a \rangle$, alors le revêtement est obtenu en quotientant le revêtement universel par la réflexion par rapport au plan $x = 0$: on obtient une demi-droite de sphères, avec un plan projectif rouge au bout. De même, si $H = \langle b \rangle$, on obtient une demi-droite de sphères avec un plan projectif bleu au bout.

(d) Si $H = \langle a, c^m \rangle$ avec m pair, le revêtement est obtenu en identifiant dans celui de (b) la sphère k avec la sphère $2m-k$ par l'application antipodale : on le voit comme une chaîne de $m-1$ sphères, avec un plan projectif rouge à chaque extrémité. De même, si $H = \langle b, c^m \rangle$ avec m pair, on l'obtient en identifiant la sphère $1+k$ avec la sphère $2m+1-k$ (modulo $2m$) par l'application antipodale : c'est une chaîne de $m-1$ sphères avec un plan projectif bleu à chaque extrémité. Enfin, si $H = \langle a, c^m \rangle$ avec m impair, ce sera une chaîne de $m-1$ sphères avec un plan projectif rouge à une extrémité, et un plan projectif bleu à l'autre.

Exercice 16. Complémentaire de deux espaces affines

Exercice 17. Surface de genre g