TD : feuille n°5
Compléments sur l'homotopie

Exercice 1. Sphéroïdes

Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, et soit $k \geq 1$ un nombre entier. Soit $s_0 \in S^k$ un point de la sphère S^k. Montrer que l'ensemble $\pi_k(X, x_0)$ coïncide avec l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $(S^k, s_0) \to (X, x_0)$. Décrire l'opération de groupe de $\pi_k(X, x_0)$ en termes des applications $(S^k, s_0) \to (X, x_0)$.

Exercice 2. Point base

Soit X un espace topologique, et soit $k \geq 2$ un nombre entier.

1. Supposons que X soit connexe par arcs. Soient x_0 et x_1 des points de X. Montrer que les groupes $\pi_k(X, x_0)$ et $\pi_k(X, x_1)$ sont isomorphes.
2. Soit $A \subset X$ un sous-espace connexe par arcs de X, et soient a_0 et a_1 des points de A. Montrer que les groupes $\pi_k(X, A, a_0)$ et $\pi_k(X, A, a_1)$ sont isomorphes.

Exercice 3. Commutativité des groupes homotopiques supérieurs

Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, et soit $k \geq 2$ un nombre entier. Montrer que le groupe $\pi_k(X, x_0)$ est abélien.

Exercice 4. Groupe d'homotopie d'un produit

Soient (X, x_0) et (Y, y_0) des espaces topologiques pointés, et soit $k \geq 1$ un nombre entier. Montrer que

$$\pi_k(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_k(X, x_0) \times \pi_k(Y, y_0).$$

Exercice 5. Groupes d'homotopie des graphes

Soit X un graphe (c'est-à-dire, un CW-complexe de dimension 1), et soit $x_0 \in X$ un point. Montrer que le groupe $\pi_k(X, x_0)$ est trivial pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice 6. Groupes d'homotopie des surfaces classiques

Calculer les groupes d'homotopie supérieurs ($k \geq 2$) de toutes les surfaces topologiques connexes compactes (sans bord et à bord) à l'exception de la sphère S^2 et du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$. On pourra admettre qu'une surface connexe compacte à bord est homéomorphe à une surface connexe compacte sans bord privée d'un nombre fini de disques ouverts.

Exercice 7. Théorème de Borsuk

Soit K un CW-complexe, et soit $L \subset K$ un sous-complexe.

1. Soit Y un espace topologique, et soit $f : K \to Y$ une application continue. Montrer que toute homotopie $F_L : L \times I \to Y$ telle que $F_L(\ell, 0) = f(\ell)$ pour tout $\ell \in L$ admet une extension à une homotopie $F_K : K \times I \to Y$ telle que
   - $F_K(\ell, t) = F_L(\ell, t)$ pour tout $\ell \in L$ et tout $t \in I$,
   - et $F_K(k, 0) = f(k)$ pour tout $k \in K$.
2. Supposons que L soit contractile. Montrer que le quotient K/L est homotopiquement équivalent à K.

Exercice 8. Paires de Borsuk

Trouver une paire topologique qui n'est pas une paire de Borsuk.

Exercice 9. Approximation simpliciale

Démontrer le théorème d'approximation simpliciale : soient K et L deux complexes simpliciaux finis, et soit $f : |K| \to |L|$ une application continue ; alors il existe un raffinement K' de K et une application simpliciale [1]

Exercice 10. Suite exacte d'une paire

Soit X un espace topologique, $A \subset X$ un sous-espace et $x_0 \in A$ un point.

1. Montrer que la suite
$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$
est exacte. (Ici ∂ est le morphisme de bord, les morphismes i_* et j_* sont induits par les inclusions $i : A \hookrightarrow X$ et $j : (X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$, respectivement.)
2. Soit Y un espace topologique, $B \subset Y$ un sous-espace et $y_0 \in B$ un point. Soit $f : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ une application continue. Montrer que le diagramme suivant est commutatif :
$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} \ldots \\
& \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\
\ldots \xrightarrow{\partial} & \pi_n(B, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(Y, y_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(B, y_0) & \xrightarrow{i_*} \ldots
\end{array}$$

Exercice 11. Lemme des cinq

1. Considérons un diagramme commutatif
$$\begin{array}{ccccccccc}
G_1 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & G_4 & \longrightarrow & G_5 \\
\downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\
H_1 & \longrightarrow & H_2 & \longrightarrow & H_3 & \longrightarrow & H_4 & \longrightarrow & H_5
\end{array}$$
où G_i et H_i, $i = 1, \ldots, 5$, sont des groupes, les deux lignes horizontales du diagramme sont des suites exactes, φ_2 et φ_4 sont des isomorphismes, φ_1 est un épimorphisme et φ_5 est un monomorphisme. Montrer que φ_3 est un isomorphisme.
2. Soit $f : (X, A) \to (Y, B)$ une application continue, et soient $x_0 \in A$ et $y_0 \in B$ des points. Supposons que les morphismes induits $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ et $f_* : \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(B, y_0)$ soient des isomorphismes pour tout entier $n \geq 1$. Montrer que $f_* : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0)$ est un isomorphisme pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 12. Propriété de relèvement et d'extension d'homotopie.

Soit $p : E \to B$ une fibration localement triviale, Y un CW-complexe, et $Y' \subset Y$ un sous-complexe. Soit $\widetilde{g} : Y \to E$ une application continue, $G : Y \times I \to B$ une homotopie telle que $G_{|Y \times \{0\}} = p \circ \widetilde{g}$, et $\widetilde{G}' : Y' \times I \to E$ une homotopie telle que $p \circ \widetilde{G}' = G_{|Y' \times I}$. Montrer qu'il existe une homotopie $\widetilde{G} : Y \times I \to E$ telle que $p \circ \widetilde{G} = G$ et $\widetilde{G}_{|Y' \times I} = \widetilde{G}'$.

Exercice 13. Quelques groupes d'homotopie de sphères

1. Soit $k < n$ des entiers strictement positifs. Montrer que le groupe $\pi_k(S^n)$ est trivial.
2. Montrer que le groupe $\pi_2(S^2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
3. Montrer que les groupes $\pi_k(S^3)$ et $\pi_k(S^2)$ sont isomorphes pour tout entier $k \geq 3$.

1. On dit que $g : |K'| \to |L|$ est *simpliciale* si g envoie chaque simplexe de K' de manière affine sur un simplexe de L.