TD : feuille n°5
Groupes homotopiques supérieurs

Exercice 1. Sphéroïdes

Exercice 2. Point base

Exercice 3. Groupes abéliens

Exercice 4. Produit

Exercice 5. Groupes d'homotopie des graphes

Soit $g : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$. Par compacité, l'image de S^n sera incluse dans un nombre fini de sommets et d'arêtes de X, donc pour montrer que g est homotopiquement triviale, il suffit de montrer qu'elle l'est quand X est supposé fini.

Nous allons construire un revêtement de X par un arbre. Pour toute arête orientée a de X, on note $d(a)$ (resp. $f(a)$) le sommet d'où a démarre (resp. celui où elle finit). On note a^{-1} la même arête parcourue dans l'autre sens.

Soit $\tilde{X}$ le graphe construit de la manière suivante : son ensemble de sommets est l'ensemble des mots $a_1 \dots a_n$ avec $n \geq 0$, et $a_1, \dots, a_n$ des arêtes orientées de X, tels que
- $d(a_1) = x_0$;
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $f(a_i) = d(a_{i+1})$;
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$ (c'est-à-dire que les mots sont réduits).

En particulier, cet ensemble comprend le mot vide ϵ. On place une arête entre les mots $a_1 \dots a_n$ et $a_1 \dots a_n a_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ et tous les $a_1, \dots, a_{n+1}$ vérifiant ces propriétés.

Ainsi, les sommets de $\tilde{X}$ correspondent exactement aux chemins dans X qui démarrent en x_0 et qui ne « retournent pas en arrière » . Deux sommets sont reliés si les chemins correspondants diffèrent d'une seule arête. L'espace $\tilde{X}$ obtenu est un graphe connexe sans cycle, c'est donc un arbre.

On définit une application $p : \tilde{X} \to X$ en envoyant
- le mot vide sur x_0 ;
- le sommet $a_1 \dots a_n$ pour $n \geq 1$ sur $f(a_n)$.
- l'arête orientée allant du sommet $a_1 \dots a_n$ vers le sommet $a_1 \dots a_n a_{n+1}$ sur l'arête orientée a_{n+1} de X.

C'est un revêtement : l'existence d'un voisinage trivialisant pour un point à l'intérieur d'une arête est claire par définition. Soit maintenant un sommet $s \in X$, et soit $(b_i)_{i \in I}$ la famille de toutes les arêtes orientées partant de s. Soit U un petit voisinage contractile de s tel que s soit le seul sommet de X contenu dans U. Nous allons montrer que U est un voisinage trivialisant de s pour p.

Soit $x = a_1 \dots a_n$ un mot non vide tel que $f(a_n) = s$. Ainsi, il existe $j \in I$ tel que $a_n = b_j^{-1}$. Alors par définition, les arêtes orientées partant de x dans $\tilde{X}$ sont :
- celles allant vers $a_1 \dots a_n b_i$ pour tout $i \neq j$.
- celle allant vers le mot $a_1 \dots a_{n-1}$.

On a donc une bijection entre l'ensemble des arêtes orientées partant de s et celui des arêtes partant de x (le cas du mot vide se traite de manière similaire) : ainsi, la composante de $p^{-1}(U)$ contenant s est bien homéomorphe à U.

Par le théorème du relèvement, g se relève en une application continue $\tilde{g} : S^n \to \tilde{X}$. Par compacité, l'image de $\tilde{g}$ est incluse dans un sous-arbre fini de $\tilde{X}$, or un arbre fini est contractile. Ainsi, $\tilde{g}$ est homotopiquement triviale, et donc f l'est aussi.

Remarque En fait n'importe quel arbre, même infini, est contractile. En effet, si A est un arbre et $x \in x_0$ un point fixé on peut construire une homotopie entre l'identité de A et l'application constante égale à x_0 de la manière suivante : pour chaque sommet v de A, on fixe un chemin $\gamma(v) : I \to A$ tel que $\gamma_v(0) = v$ et $\gamma_v(1) = x_0$. Pour toute arête a de A, d'extrémités v_1 et v_2, on définit une application F sur le bord du carré $a \times I$ par

$$F_{|a \times \{0\}} = \mathrm{id}_a$$

$$F_{|v_i \times I} = \gamma_{v_i}$$
$$F_{|a \times \{1\}} = x_0$$

On utilise alors le lemme suivant pour prolonger F à tout le carré $a \times I$ (en considérant le carré comme homéomorphe au disque $\bar{D}^2$) pour toute arête a, et ainsi en une homotopie $F : A \times I \to A$ entre id_A et x_0.

Lemme Soit X un espace topologique et $f : S^n \to X$ une application continue. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f est homotope à une application constante.

(b) f se prolonge en une application continue $\tilde{f} : \bar{D}^{n+1} \to X$.

Montrons $(a) \Rightarrow (b)$ (nous n'avons besoin que de ce sens-là). Soit F une homotopie entre f et l'application constante égale à $x_0 \in X$. On pose

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} F(\frac{x}{||x||}, 2(1 - ||x||)) & \text{pour } ||x|| \geq \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{pour } ||x|| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 6. Groupes d'homotopie des surfaces classiques

Exercice 7. Théorème de Borsuk

1. Nous allons construire F_K par récurrence sur le n-squelette K^n de K pour tout n. Pour initialiser la récurrence, il faut prolonger F_L à $(K^0 \cup L) \times I$: on pose $F_K(x,t) = f(x)$ pour tout $(x,t) \in K^0 \times I$. Supposons maintenant F_K déjà construite sur $(K^n \cup L) \times I$ pour un certain n. Soit e^{n+1} une $n+1$-cellule contenue dans $X \setminus L$. Par définition, elle est munie d'une application caractéristique $f : \bar{D}^{n+1} \to X$ fournissant un homéomorphisme entre e^{n+1} et D^{n+1}. On note $\bar{e}^{n+1} = f(\bar{D}^{n+1})$ et $\partial\bar{e}^{n+1} = f(\partial\bar{D}^{n+1})$. Par hypothèse de récurrence, F_K est déjà construite sur $\partial\bar{e}^{n+1} \times I$, puisque la frontière $\partial\bar{e}^{n+1}$ est incluse dans K^n. Il suffit maintenant de prolonger

$$g := F_K \circ (f \times \mathrm{id}_I) : (\partial\bar{D}^{n+1} \times I) \cup (\bar{D}^{n+1} \times \{0\}) \to Y$$

en une application continue $h : \bar{D}^{n+1} \times I \to Y$. Autrement dit, nous avons une application bien définie sur le fond $D^{n+1} \times \{0\}$ et la paroi $\partial D^{n+1} \times I$ du cylindre $D^{n+1} \times I$, et nous voulons la prolonger à tout le cylindre. Pour cela, on choisit un point P au-dessus du cylindre, et on considère la rétraction $r : D^{n+1} \times I \to (\partial D^{n+1} \times I) \cup (D^{n+1} \times \{0\})$ qui envoie chaque point du cylindre vers l'unique point d'intersection de $(\partial D^{n+1} \times I) \cup (D^{n+1} \times \{0\})$ avec la demi-droite d'origine P passant par ce point. On définit alors h comme la composée

$$D^{n+1} \times I \xrightarrow{r} (\partial D^{n+1} \times I) \cup (D^{n+1} \times \{0\}) \xrightarrow{g} Y.$$

Ce procédé permet de construire F_K continue sur $K^n \times I$ pour tout $n \geq 0$. Si K est de dimension finie, on a terminé. Dans le cas contraire, il faut encore vérifier que F_K est bien continue sur $K \times I$. Pour cela, on va utiliser les lemmes suivants :

Lemme 1 Soit K un CW-complexe, et A une partie de K. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) A est fermé

(b) L'intersection de A avec l'adhérence de toute cellule de K est fermée.

(c) L'intersection de A avec tout compact de K est fermée.

L'équivalence $(a) \Leftrightarrow (c)$ se reformule en disant que la topologie de K est *engendrée par les compacts.*
Démonstration : $(a) \Leftrightarrow (b)$ provient de la définition de la topologie d'un CW-complexe. De plus, $(a) \Rightarrow (c)$ et $(c) \Rightarrow (b)$ sont immédiates.

Le lemme suivant est simplement une conséquence des propriétés de la topologie compacte-ouverte. On rappelle, que, si Y et Z sont des espaces topologiques avec Y localement compacts, c'est la topologie engendrée sur l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}(Y,Z)$ par les parties

$$V(C,U) = \{f \in \mathcal{C}(Y,Z),\ f(C) \subset U\}$$

pour tout $C \subset Y$ compact et $U \subset Z$ ouvert.
Rappelons la propriété suivante de la topologie compacte-ouverte, évoquée dans le corrigé de l'exercice 6 du TD 2 : Soient X, Y, Z des espaces topologiques, avec Y localement compact. Alors on a une bijection bien définie

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X \times Y, Z) & \to & \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \\ f & \mapsto & x \mapsto f_x \end{array}$$

où $f_x : Y \to Z$ est l'application $y \mapsto f(x, y)$.
Le lemme suivant, appliqué à $X = K$ et $Y = I$, nous permet de conclure :

Lemme 2 Soit X un espace dont la topologie est engendrée par les compacts, Y un espace localement compact, et Z un espace topologique. Alors $f : X \times Y \to Z$ est continue si et seulement si $f_{|C\times Y} : C \times Y \to Z$ est continue pour tout compact C de X.
Démonstration : D'après la propriété ci-dessus, $f : X \times Y \to Z$ est continue si et seulement si l'application $X \to \mathcal{C}(Y, Z)$, $x \mapsto f_x$ est continue. Comme la topologie de X est engendrée par les compacts, c'est équivalent à ce que sa restriction $C \to \mathcal{C}(Y, Z)$ soit continue pour tout compact C de X. Ceci est à son tour équivalent à ce qu'on veut en réutilisant la propriété de la topologie compacte-ouverte.

2. Soit $q : K \to K/L$ l'application quotient. Notre but est de trouver une application continue $p : K/L \to K$ telle que $p \circ q \sim \mathrm{id}_K$ et $q \circ p \sim \mathrm{id}_{K/L}$. Soit $r : L \to *$ une rétraction par déformation de L sur un point, et soit $F_L : L \times I \to L$ une homotopie telle que $F_L(\cdot, 0) = \mathrm{id}_L$ et $F_L(\cdot, 1) = r$. D'après 1. appliqué à id_K et F_L, il existe une application $F_K : K \times I \to K$ prolongeant F_L et telle que $F_K(\cdot, 0) = \mathrm{id}_K$.
Puisque $F_K(\cdot, 1)$ prolonge r, l'application $F_K(\cdot, 1)$ est constante sur tout L, et passe au quotient en une application continue $p : K/L \to K$. Ainsi, l'application p vérifie
$$p \circ q = F_K(\cdot, 1) \sim F_K(\cdot, 0) = \mathrm{id}_K.$$
Il reste à vérifier que $q \circ p$ est homotope à $\mathrm{id}_{K/L}$. Pour cela, on remarque que pour tout $t \in [0, 1]$, $F_K(\cdot, t)(L) = F_L(\cdot, t)(L) \subset L$, de sorte que $q \circ F_K$ passe au quotient pour donner une application continue
$$G : K/L \times I \to K/L$$
telle que $G(\cdot, 0) = id_{K/L}$ et $G(\cdot, 1) = q \circ p$, d'où la conclusion.

Exercice 8. Paires de Borsuk

Une manière facile de s'en sortir est de prendre une paire (X, A) avec A non fermé (cf remarque ci-dessous), par exemple $X = S^1$ et $A = S^1 \setminus \{1\}$, de sorte que X/A soit un espace topologique $\{a, b\}$ de cardinal 2 avec pour ouverts $\varnothing, \{a, b\}$ et $\{a\}$. Par la question 1 de l'exercice 11 de la feuille 4, il est simplement connexe et ne peut donc pas être homotopiquement équivalent à S^1.
Si on impose que A soit fermé, on peut par exemple prendre $X = [0, 1]$ et $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*\}$.

Exercice 9. Approximation simpliciale

Voir Hatcher, théorème 2C.1

Exercice 10. Suite exacte d'une paire

On note $J^{n-1} = \partial I^n \setminus \mathrm{Int}(I^{n-1} \times \{0\})$. On rappelle que $\pi_n(X, A, x_0)$ est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ (les homotopies devant être également de ce type). De manière analogue aux groupes d'homotopie absolus (cf exercice 1), ces applications peuvent être vues comme des applications $f : (D^n, \partial D^n, s_0) \to (X, A, x_0)$ avec $s_0 \in \partial D^n$. On rappelle que pour $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$, $\partial[f] = [f_{|I^{n-1}\times\{0\}}]$.

1. On veut montrer que la suite
$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$
est exacte.

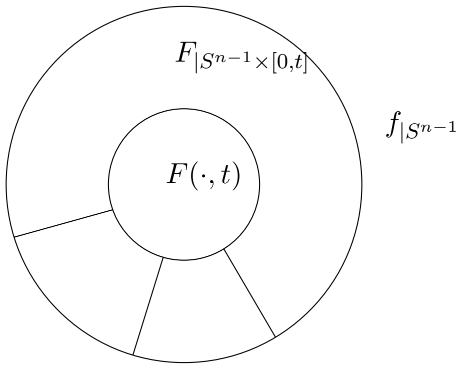
(a) **Exactitude à l'étape** $\pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0)$

On va montrer le lemme suivant, qui donne une caractérisation des applications d'image triviale dans $\pi_n(X, A, x_0)$:

Lemme : Une application $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ est de classe triviale dans $\pi_n(X, A, x_0)$ si et seulement si elle est homotope relativement à S^{n-1} à une application d'image contenue dans A.

Démonstration : Supposons f homotope relativement à S^{n-1} à $g : (D^n, S^{n-1}, x_0) \to (X, A, x_0)$ d'image incluse dans A. Alors f et g ont la même classe dans $\pi_n(X, A, x_0)$, donc il suffit de montrer que la classe de g est triviale. Soit r une rétraction par déformation de D^n sur s_0, de sorte qu'il existe $H : D^n \times I \to D^n$ une homotopie telle que $H(\cdot, 0) = \mathrm{id}$, $H(\cdot, 1) = r$. Alors $g \circ H$ fournit une homotopie de g vers l'application constante égale à A telle que pour tout $t \in I$, $g \circ H(\cdot, t)$ est une application $(D^n, S^{n-1}, s_0) \to (A, A, x_0) \subset (X, A, x_0)$.

Réciproquement, supposons f de classe nulle dans $\pi_n(X, A, x_0)$, de sorte qu'il existe $F : D^n \times I \to X$ telle que $F_{|D^n \times \{0\}} = f$, $F_{|D^n \times \{1\}} = x_0$, et telle que pour tout $t \in I$, $F(\cdot, t)$ définisse une application $(D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$. On définit alors pour tout $f \in I$ l'application f_t : $(D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ comme montré sur le dessin.



Autrement dit, $f_{t|S^{n-1}} = f_{|S^{n-1}} = F(\cdot, 0)_{|S^{n-1}}$, et sur la boule $D^n(0, 1 - \frac{t}{2})$ de rayon $1 - \frac{t}{2}$,f_t est donnée par $F(\cdot, t)$ (après identification appropriée de $D^n(0, \frac{t}{2})$ avec D^n). Puis on identifie la couronne des points de rayon dans $[1 - \frac{t}{2}, 1]$ de D^n avec $S^{n-1} \times [0, t]$ (soit une partie de la paroi du cylindre $D^n \times I$ sur lequel est définie F), et on utilise $F_{S^{n-1} \times [0,t]}$ dessus pour relier continument les deux morceaux de f_t déjà définis. L'homotopie construite est bien relative à S^{n-1}, on a $f_0 = f$, et f_1 est bien d'image incluse dans A, puisque $F(S^{n-1} \times I) \subset A$ et $F(\cdot, 1) = x_0$.

Passons maintenant à l'exactitude de la suite. Soit $f : (D^n, S^{n-1}) \to (A, x_0)$. Alors $i \circ f$ est d'image incluse dans A, et par le lemme, $j \circ i \circ f$ est de classe nulle.

Réciproquement, soit $f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$ telle que $j_*[f] = 0$. Alors d'après le lemme, $j \circ f$ est homotope relativement à S^{n-1} à une application d'image incluse dans A. Ainsi, $[f] \in \mathrm{im} i_*$.

(b) **Exactitude à l'étape** $\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0)$.

On a $\partial j_* = 0$, puisque $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ induit l'application constante égale à x_0 sur $I^{n-1} \times 0$.

Montrons que $\ker \partial \subset \mathrm{im} j_*$. Soit $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ une application continue telle que $[f] \in \ker \partial$. Cela veut dire qu'il existe une homotopie $F : I^{n-1} \times I \to A$ qui déforme $f_{|I^{n-1}}$ relativement à ∂I^{n-1} en l'application constante égale à x_0, c'est-à-dire que

— $F(\cdot, 0) = f_{|I^{n-1}}$
— $F(\cdot, 1) = x_0$
— $F_{|\partial I^{n-1} \times I} = x_0$

On définit alors l'application $g : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ suivante : pour tout $(x,t) \in I^{n-1} \times I = I^n$, on pose

$$g(x,t) = \begin{cases} f(x, 1-2t) \text{ pour } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F(x, 2t-1) \text{ pour } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

On définit de plus pour tout $s \in [0,1]$ l'application $g_s : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ telle que pour tout $(x,t) \in I^{n-1} \times I = I^n$

$$g_s(x,t) = \begin{cases} f(x, 1 - \frac{2}{2-s}t) \text{ pour } t \in [0, 1-\frac{s}{2}] \\ F(x, \frac{2}{2-s}t - 1) \text{ pour } t \in [1-\frac{s}{2}, 1] \end{cases}$$

On a $g_0(x,t) = f(x, 1-t)$ et $g_1 = g$, dons $[f] \in \mathrm{im} j_*$.

(c) **Exactitude à l'étape** $\pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0)$.
Soit $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0)$. Alors f fournit une homotopie de $f_{|I^n \times \{0\}}$ vers $f_{|I^n \times \{1\}}$, qui est constante égale à x_0, donc $i_* \partial [f] = 0$.
Réciproquement, soit $f : (I^n, \partial I^n) \to (A, x_0)$ telle que $i_*[f] = 0$. Alors il existe une homotopie $F : I^n \times I \to X$ de f vers l'application constante égale à x_0, relativement à ∂I^n. Alors on a $F(I^n \times 0) = f(I^n) \subset A$, donc F fournit une classe $[F]$ dans $\pi_n(X, A, x_0)$ telle que $\partial [F] = [f]$.

2. On veut montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \ldots \\
 & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\
\ldots & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(B, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(Y, y_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(B, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \ldots
\end{array}$$

La commutativité des carrés

$$\begin{array}{ccc}
(A, x_0) & \xrightarrow{i} & (X, x_0) \\
\downarrow f & & \downarrow f \\
(B, x_0) & \xrightarrow{i} & (Y, y_0)
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
(X, x_0, x_0) & \xrightarrow{j} & (X, A, x_0) \\
\downarrow f & & \downarrow f \\
(Y, y_0, y_0) & \xrightarrow{j} & (Y, B, y_0)
\end{array}$$

assure celle du carré de gauche et du carré central dans le diagramme considéré. Le carré de droite commute car la composition avec f commute avec la restriction à I^{n-1}.

Exercice 11. Lemme des cinq

Exercice 12. Propriété de relèvement et d'extension d'homotopie

Chaque cellule fermée de Y est compacte, donc incluse dans un nombre fini d'ouverts trivialisants de la fibration p. Quitte à faire une subdivision de Y en cellules plus petites, on peut alors supposer que chaque cellule est incluse dans un ouvert trivialisant.

Ensuite, de même que dans l'exercice 7, par récurrence sur la dimension des cellules on se ramène à construire $\tilde{G}$ sur chaque cellule, sachant qu'elle est déjà connue sur le bord de la cellule. Ainsi, il suffit de montrer le résultat lorsque $Y = D^n$, $\tilde{G}$ est déjà connue sur $\partial D^n \times I \cup D^n \times \{0\}$ et p est triviale.

Dans ce cas, on peut supposer que $E = B \times F$ de sorte que $\tilde{g}$ soit de la forme $(G(\cdot, 0), h)$ pour une certaine fonction continue $h : D^n \to F$. Par hypothèse, $\tilde{G}$ définit une fonction $\partial D^n \times I \cup D^n \times \{0\} \to B \times F$, qui s'écrit sous la forme $(G_{|\partial D^n \times I \cup D^n \times \{0\}}, H)$, pour une certaine fonction $H : \partial D^n \times I \cup D^n \times \{0\} \to F$ telle que $H(\cdot, 0) = h$. Il suffit donc de prolonger H à tout $D^n \times I$, ce qui se fait en appliquant le théorème de Borsuk (ou plus exactement l'argument qui conclut la preuve du théorème de Borsuk).