TD : feuille n°6
Complexes et homologie

Exercice 1. Premiers calculs d'homologie

Soit X un espace topologique.

1. On suppose dans cette question que X est un point. Déterminer $H_n(X;\mathbf{Z})$ pour tout $n \geq 0$.
2. On suppose que X est connexe par arcs. Montrer que $H_0(X;\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$.
3. On suppose toujours X connexe par arcs et on considère une application continue $f : X \to Y$ vers un autre espace connexe par arcs. Montrer que f induit un isomorphisme $f_* : H_0(X;\mathbf{Z}) \to H_0(Y;\mathbf{Z})$.

Exercice 2. Sommes directes de complexes

Soient (C,∂) et (C',∂') deux complexes de chaînes. On définit le complexe somme directe par

$$(C,\partial) \oplus (C',\partial') = (C \oplus C', \partial \oplus \partial').$$

Montrer que $H_*((C,\partial) \oplus (C',\partial')) = H_*(C,\partial) \oplus H_*(C',\partial')$.

Exercice 3. Suites exactes courtes

Soit $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ une suite exacte courte de groupes abéliens.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\simeq"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\simeq"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & A \oplus C \arrow[r, "q"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

   dont les morphismes verticaux sont des isomorphismes, et où $i : A \to A \oplus C$ est l'inclusion canonique et $q : A \oplus C \to C$ la projection sur le facteur direct C.

   (b) Il existe un morphisme $s : C \to B$ tel que $g \circ s = \mathrm{id}$.

   (c) Il existe un morphisme $r : B \to A$ tel que $r \circ f = \mathrm{id}$.

   On dit dans ce cas que la suite exacte est *scindée*.
2. Montrer que si C est un groupe abélien libre, alors les conditions précédentes sont satisfaites.

Exercice 4. Exemples élémentaires de complexes

1. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de groupes abéliens. Construire l'exemple le plus simple possible d'un complexe de groupes abéliens C_* tel que $H_n(C_*) = A_n$. Même question en imposant de plus que les C_i soient des groupes abéliens libres [1].
2. Construire un complexe de groupes abéliens C_* tel que les C_i ne soient pas des groupes abéliens de type fini, mais dont tous les groupes d'homologie $H_k(C)$ soient des groupes abéliens de type fini.

Exercice 5. Caractéristique d'Euler d'un complexe

Soit k un corps, et soit C_* un complexe de k-espaces vectoriels de dimension finie tel que $C_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i. On appelle caractéristique d'Euler de C_* le nombre

$$\chi(C) = \sum (-1)^n \dim_k H_n(C) .$$

Montrer que $\chi(C) = \sum (-1)^n \dim_k C_n$.

1. On rappelle que sur un anneau principal R, tout sous-module d'un R-module libre est libre.