TD : feuille n°6
Complexes et homologie

Exercice 1. Premiers calculs d'homologie

Exercice 2. Sommes directes de complexes

Exercice 3. Suites exactes courtes

Soit $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ une suite exacte courte de groupes abéliens.

1. $(a) \Rightarrow (b)$ et $(a) \Rightarrow (c)$ sont claires. Pour $(b) \Rightarrow (a)$, définir le morphisme

$$\begin{array}{ccc} A \oplus C & \to & B \\ (a,c) & \mapsto & f(a)+s(c) \end{array}$$

et montrer que c'est un isomorphisme donnant le diagramme souhaité. Pour $(c) \Rightarrow (a)$ faire pareil avec

$$\begin{array}{ccc} B & \to & A \oplus C \\ b & \mapsto & (r(b), g(b)) \end{array}$$

2. Si C est un groupe abélien libre, alors la condition (b) est satisfaite : envoyer chaque générateur de C sur n'importe lequel de ses antécédents.

Exercice 4. Exemples élémentaires de complexes

1. On peut prendre $C_n = A_n$ pour la première question, avec $d = 0$. Pour la deuxième question, on peut écrire chaque A_n comme le quotient d'un groupe abélien libre par un sous groupe, libre d'après la note de bas de page : $0 \to F_n \to G_n \to A_n \to 0$. On définit $C_n = F_{n-1} \oplus G_n$ avec $d_n(g,f) = (0, i_{n-1}(f))$, où i_{n-1} est l'inclusion $F_{n-1} \to G_{n-1}$.
2. Considérer par exemple le complexe

$$\ldots \xrightarrow{0} \mathbf{Q} \xrightarrow{\times 2} \mathbf{Q} \xrightarrow{0} \mathbf{Q} \xrightarrow{\times 2} \mathbf{Q} \xrightarrow{0} \ldots.$$

Tous ses groupes d'homologie sont nuls.

Exercice 5. Caractéristique d'Euler d'un complexe

Pour tout n, d'après le théorème du rang :

$$\dim C_n = \dim \ker d_{n-1} + \operatorname{rg} d_{n-1}.$$

D'autre part, par définition,

$$\dim H_n(C) = \dim \ker d_{n-1} - \operatorname{rg} d_n.$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum (-1)^n \dim H_n(C) &= \sum (-1)^n \dim \ker d_{n-1} + \sum (-1)^n \operatorname{rg} d_n \\ &= \sum (-1)^n (\dim \ker d_{n-1} - \operatorname{rg} d_{n-1}) \\ &= \sum (-1)^n C_n \end{aligned}$$