TD : feuille n°7
Homologie singulière

Dans tout ce qui suit, la notation $H_n(X)$ (resp. $H_n(X,A)$) désigne le groupe d'homologie $H_n(X;\mathbb{Z})$ (resp. $H_n(X,A;\mathbb{Z})$).

Exercice 1. Quelques propriétés

Soit (X,A) une paire d'espaces topologiques.

1. Montrer que $H_0(X,A)=0$ si et seulement si A rencontre toutes les composantes connexes par arcs de X.
2. Montrer que $H_1(X,A)=0$ si et seulement si l'application $H_1(A)\to H_1(X)$ est surjective et toute composante connexe par arcs de X contient au plus une composante connexe par arcs de A.
3. On suppose que A est un point. Montrer qu'on a des isomorphismes $H_n(X,A)\simeq \tilde{H}_n(X)$ pour tout $n\geq 0$.
4. Montrer que l'inclusion $A\hookrightarrow X$ induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homologie si et seulement si les groupes d'homologie relatifs de la paire (X,A) sont tous nuls.
5. Soit (X,A) une paire d'espaces topologique telle que A soit un rétracte de X. Montrer que l'application $H_n(A)\to H_n(X)$ induite par l'inclusion $A\hookrightarrow X$ est injective.

Exercice 2. Applications de paires

Soient (X,A) et (Y,B) deux paires d'espaces topologiques, et soient $f:(X,A)\to(Y,B)$ et $g:(X,A)\to(Y,B)$ des applications continues. On suppose que f et g sont homotopes (en tant qu'applications de paires). Montrer que, pour tout entier $k\geq 0$, les morphismes $f_*:H_k(X,A)\to H_k(Y,B)$ et $g_*:H_k(X,A)\to H_k(Y,B)$ coïncident.

Exercice 3. Longues suites homologiques

Soit (X,A,B) un triplet d'espaces topologiques ($X\supset A\supset B$).

1. Montrer que la suite homologique
$$\ldots\to H_k(A)\to H_k(X)\to H_k(X,A)\to H_{k-1}(A)\to\ldots$$
de la paire (X,A) est exacte.
2. Montrer que la suite suivante est exacte :
$$\ldots\xrightarrow{d_{k+1}} H_k(A,B)\xrightarrow{i_{*,k}} H_k(X,B)\xrightarrow{j_{*,k}} H_k(X,A)\xrightarrow{d_k} H_{k-1}(A,B)\xrightarrow{i_{*,k-1}}\ldots$$
où les applications $i:(A,B)\to(X,B)$ et $j:(X,B)\to(X,A)$ sont fournies par l'inclusion $A\hookrightarrow X$ et l'identité $X\to X$, respectivement, et d_k est la composition des morphismes $H_k(X,A)\to H_{k-1}(A)$ et $H_{k-1}(A)\to H_{k-1}(A,B)$ qui proviennent des suites exactes des paires (X,A) et (A,B), respectivement.
3. En déduire la suite exacte de la paire (X,A) pour les groupes d'homologie réduits.

Exercice 4. Bouquet d'espaces

Soient X et Y deux espaces topologiques pointés, dont le point base admet un voisinage ouvert qui se rétracte par déformation forte sur ce point. Calculer $H_n(X\vee Y;\mathbb{Z})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ en fonction des groupes d'homologie de X et de Y.

Exercice 5. Homologie du parachute

Calculer l'homologie du « parachute » obtenu en recollant les trois sommets de Δ^2.

Exercice 6. Suspensions

Soit X un espace topologique. On rappelle que la suspension SX de X est l'espace quotient $CX/(X \times \{0\})$. Calculer l'homologie de SX en fonction de l'homologie de X.

Exercice 7. Tore et bouquets de sphères

Montrer que le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ a les mêmes groupes d'homologie singulière que le bouquet $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ mais que ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.

Exercice 8. Produit de sphères

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Calculer les groupes d'homologie du produit $S^n \times S^m$.

Exercice 9. Homologie de la bouteille de Klein

Calculer les groupes d'homologie de la bouteille de Klein.

Exercice 10. Homologie de la surface de genre g.

1. Soit X_g une sphère dont on a retiré $2g$ petits disques D_i^2, $1 \leq i \leq 2g$. Calculer l'homologie de X_g, ainsi que l'application induite en homologie par $\bigsqcup \partial D_i^2 \hookrightarrow X_g$.
2. Calculer l'homologie de la surface S_g.
3. Soient $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ deux ensembles de points distincts de S_g.
   (a) Calculer l'homologie de $S_g \setminus X$.
   (b) Calculer l'homologie du quotient S_g/Y.
   (c) Calculer l'homologie de $(S_g \setminus X)/Y$.

Exercice 11. Complémentaire d'un cercle

Calculer l'homologie de $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$.

Exercice 12. Degré d'une application

Soit $n \geq 1$ et $f : S^n \to S^n$ une application continue. On rappelle que le degré de f est le nombre entier $\deg(f)$ tel que, pour tout $z \in H_n(S^n; \mathbb{Z})$, on ait $f_*(z) = \deg(f)z$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, le degré de $f : S^n \to S^n$ est égal au degré de sa suspension $Sf : S^{n+1} \to S^{n+1}$.
2. Construire un morphisme de groupes surjectif
$$\pi_n(S^n) \twoheadrightarrow H_n(S^n; \mathbb{Z}).$$
3. Montrer que si $\deg(f) \neq 0$ alors f est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
4. Soit $f : S^n \to S^n$ sans point fixe. Montrer que $\deg f = (-1)^{n+1}$.
5. **Groupe agissant librement.** Soit G un groupe non-trivial agissant librement sur S^{2n} par homéomorphismes. Montrer que $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

6. **Champs de vecteurs.**
   (a) On suppose n impair. Montrer qu'il existe sur S^n un champ de vecteurs tangents continu ne s'annulant pas.
   (b) Montrer le théorème de la « boule chevelue » : tout champ de vecteurs tangents continu sur S^n avec n pair s'annule en au moins un point.

Exercice 13. Homologie de quelques espaces « pathologiques »

1. Calculer l'homologie de la droite à deux origines, et plus généralement de la droite à n origines.
2. Calculer l'homologie de l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $\sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Exercice 14. Théorème de Hurewicz

Soit X un espace topologique. On note $C_2(X;\mathbb{Z})$ le groupe des 2-chaînes singulières de X. On rappelle qu'un chemin $\gamma : [0,1] \to X$ peut être vu comme un 1-simplexe singulier de X, qui sera un 1-cycle si et seulement si γ est un lacet.

1. Soit α un chemin constant. Montrer qu'il est égal au bord d'une certaine 2-chaîne singulière.
2. Soient $\alpha : [0,1] \to X$ et $\beta : [0,1] \to X$ des chemins tels que $\alpha(1) = \beta(0)$, de sorte qu'on puisse considérer le chemin $\alpha\beta$ obtenu par concaténation. Montrer qu'il existe une 2-chaîne singulière $c \in C_2(X;\mathbb{Z})$ telle que $\alpha\beta = \alpha + \beta + \partial c$.
3. Soient $\alpha : [0,1] \to X$ et $\beta : [0,1] \to X$ des chemins homotopes. Montrer que $\alpha - \beta$ est le bord d'une 2-chaîne singulière.
4. On fixe un point $x_0 \in X$. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes bien défini
$$\phi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X;\mathbb{Z})$$
envoyant la classe d'homotopie d'un lacet de base x_0 sur la classe d'homologie du 1-cycle correspondant. Ce morphisme est appelé le *morphisme de Hurewicz*.
5. On suppose maintenant que X est connexe par arcs. Montrer qu'alors ce morphisme induit un isomorphisme entre $H_1(X;\mathbb{Z})$ et l'abélianisé de $\pi_1(X, x_0)$ (c'est-à-dire le quotient de $\pi_1(X, x_0)$ par le sous-groupe engendré par tous les commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$).