

TD : feuille n°7

Homologie singulière

Dans tout ce qui suit, la notation $H_n(X)$ (resp. $H_n(X, A)$) désigne le groupe d'homologie $H_n(X; \mathbf{Z})$ (resp. $H_n(X, A; \mathbf{Z})$).

Exercice 1. Quelques propriétés

Exercice 2. Applications de paires

Exercice 3. Longues suites homologiques

Exercice 4. Bouquet d'espaces

Exercice 5. Homologie du parachute

Exercice 6. Suspensions

Exercice 7. Tore et bouquets de sphères

Le bouquet B a pour groupes d'homologie $H_0(B) = \mathbf{Z}$, $H_1(B) = H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \oplus H_1(S^2) = \mathbf{Z}^2$ et $H_2(B) = H_2(S^1) \oplus H_2(S^1) \oplus H_2(S^2) = \mathbf{Z}$.

En ce qui concerne le tore, les calculs de l'homologie de la surface de genre g impliquent qu'il a également ces groupes d'homologie.

En revanche, ces espaces ne sont pas homotopiquement équivalents car ils n'ont pas le même groupe fondamental : $\pi_1(T) = \mathbf{Z}^2$ alors qu'une application de Van Kampen montre que $\pi_1(B)$ est le même que celui du bouquet de 2 cercles, à savoir $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

Exercice 8. Produit de sphères

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Calculer les groupes d'homologie du produit $S^n \times S^m$.

Ce calcul peut se faire par diverses récurrences. On exclut le cas où n ou m est nul, dans lequel on obtient simplement l'union disjointe de deux sphères, dont l'homologie est connue. Ainsi, nous aurons affaire à des espaces connexes par arcs, et nous ne nous occuperons pas du H_0 .

Etape 1 : Calcul dans le cas où $n = 1$ ou $m = 1$. On connaît déjà l'homologie du tore $S^1 \times S^1$. Pour calculer celle de $S^1 \times S^2$, on utilise le recouvrement de S^2 par les ouverts contractiles D_+^2 et D_-^2 obtenus en retirant à S^2 respectivement son pôle sud et son pôle nord. L'intersection $D_+^2 \cap D_-^2$ se rétracte par déformation sur l'équateur, c'est-à-dire S^1 . Ainsi, Mayer-Vietoris pour les groupes d'homologie réduits avec le recouvrement par les deux ouverts $S^1 \times D_+^2$ et $S^1 \times D_-^2$ homotopes à S^1 nous donne un isomorphisme

$$H_3(S^1 \times S^2) \simeq H_2(S^1 \times S^1) = \mathbf{Z}$$

ainsi qu'une suite exacte

$$0 \rightarrow H_2(S^1 \times S^2) \rightarrow H_1(S^1 \times S^1) \rightarrow H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^1 \times S^2) \rightarrow 0$$

Il faut déterminer le morphisme $\mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ du milieu, donné par $(i_{+,*}, -i_{-,*})$, où $i_+ : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times D_+^2$ et $i_- : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times D_-^2$ sont les deux inclusions. On voit que par ces inclusions, le premier générateur de $H_1(S^1 \times S^1)$ est envoyé sur un générateur de $H_1(S^1)$, alors que le deuxième est envoyé sur 0. Le morphisme cherché est donc donné par

$$(a, b) \mapsto (a, -a).$$

Son noyau comme son image sont par conséquent isomorphes à \mathbf{Z} , et on obtient

$$H_2(S^1 \times S^2) = \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad H_1(S^1 \times S^2) = \mathbf{Z}.$$

On suppose maintenant par récurrence qu'on a montré que, pour un $n \geq 2$, $H_k(S^1 \times S^n) = \mathbf{Z}$ pour $k \in \{0, 1, n, n+1\}$, et 0 sinon.

On procède par un découpage similaire de S^{n+1} en deux ouverts D_+ et D_- dont l'intersection se rétracte par déformation sur S^n . En appliquant Mayer-Vietoris (en homologie réduite), nous avons pour tout $k \geq 2$

$$H_{k+1}(S^1 \times S^{n+1}) \simeq H_k(S^1 \times S^n)$$

ainsi que

$$0 \rightarrow H_2(S^1 \times S^{n+1}) \rightarrow H_1(S^1 \times S^n) \rightarrow H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^1 \times S^{n+1}) \rightarrow 0$$

Cette fois-ci, le morphisme $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ au milieu est donné par $a \mapsto (a, -a)$, et est donc injectif d'image \mathbf{Z} . Nous avons donc bien $H_2(S^1 \times S^{n+1}) = 0$ et $H_1(S^1 \times S^{n+1}) = \mathbf{Z}$.

Etape 2 : On suppose $n \geq m \geq 2$ et on fait une récurrence sur $n+m$. On suppose que pour $n+m = N$ fixé, nous savons que

- si $n \neq m$, alors $H_k(S^n \times S^m) = \mathbf{Z}$ pour $k \in \{0, n, m, n+m\}$ et 0 sinon.
- $H_k(S^n \times S^m) = \mathbf{Z}$ pour $k \in \{0, 2n\}$, \mathbf{Z}^2 pour $k = n$ et 0 sinon.

Soient $n > m \geq 2$. En découpant S^m en deux ouverts contractiles comme précédemment, pour tout k , nous avons la suite exacte

$$H_k(S^n \times S^{m-1}) \rightarrow H_k(S^n) \oplus H_k(S^n) \rightarrow H_k(S^n \times S^m) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^n \times S^{m-1}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^n) \oplus \tilde{H}_{k-1}(S^n)$$

Pour $k \neq n, n+1$, cela nous donne directement un isomorphisme

$$H_k(S^n \times S^m) \simeq \tilde{H}_{k-1}(S^n \times S^{m-1})$$

qui nous permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence. Pour $k = n+1$, nous obtenons, puisque $n \neq m$, une suite exacte

$$0 \rightarrow H_{n+1}(S^n \times S^m) \rightarrow H_n(S^n \times S^{m-1}) \rightarrow H_n(S^n) \oplus H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n \times S^m) \rightarrow 0$$

Le morphisme $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ du milieu, comme précédemment, est donné par $a \mapsto (a, -a)$, et donc $H_{n+1}(S^n \times S^m) = 0$ et $H_n(S^n \times S^m) = \mathbf{Z}$.

Reste à traiter le cas de $S^n \times S^n$. Une nouvelle application de Mayer-Vietoris donne la suite exacte

$$H_k(S^n \times S^{n-1}) \rightarrow H_k(S^n) \oplus H_k(S^n) \rightarrow H_k(S^n \times S^n) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^n \times S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^n) \oplus \tilde{H}_{k-1}(S^n)$$

Le cas $k \neq n, n+1$ se traite comme ci-dessus. Pour $k = n+1$, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H_{n+1}(S^n \times S^n) \rightarrow H_n(S^n \times S^{n-1}) \rightarrow H_n(S^n) \oplus H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n \times S^n) \rightarrow H_{n-1}(S^n \times S^{n-1}) \rightarrow 0.$$

Le morphisme $H_n(S^n \times S^{n-1}) \rightarrow H_n(S^n) \oplus H_n(S^n)$ est encore une fois $a \mapsto (a, -a)$. Cela nous donne l'annulation de $H_{n+1}(S^n \times S^n)$, ainsi qu'une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_n(S^n \times S^n) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

d'où $H_n(S^n \times S^n) = \mathbf{Z}^2$.

Exercice 9. Homologie de la bouteille de Klein

Exercice 10. Homologie de la surface de genre g .

1. La sphère trouée $X_g = S^2 \setminus \bigsqcup_{i=1}^{2g} D_i^2$ est homotope à un bouquet de $2g - 1$ cercles. On obtient alors $H_0(X_g) \simeq \mathbf{Z}$, $H_1(X_g) \simeq \mathbf{Z}^{2g-1}$ et $H_i(X_g) = 0$ pour tout $i \geq 2$.

L'application $\mathbf{Z}^{2g} \rightarrow \mathbf{Z}$ induite au niveau des H_0 par l'inclusion $\bigsqcup_{i=1}^{2g} \partial D_i^2 \hookrightarrow X_g$ est $(a_i)_i \mapsto \sum_i a_i$. Si on oriente tous les petits cercles dans le même sens sur la sphère, l'application induite en H_1 est $\mathbf{Z}^{2g} \rightarrow \mathbf{Z}^{2g-1}$, qui envoie l'élément de base e_i vers e_i pour $i < 2g$, et envoie e_{2g} vers $-\sum_{i=1}^{2g-1} e_i$.

2. On utilise Mayer-Vietoris avec $U = X_g$ et V l'union de g cylindres qu'on recolle chacun sur deux des trous de X_g . Pour fixer les idées, disons que le i -ème cylindre C_i est recollé sur ∂D_i^2 et ∂D_{i+g}^2 , pour tout i . Alors $U \cap V$ se rétracte par déformation sur $\bigsqcup_{i=1}^{2g} \partial D_i^2$, d'où : $H_k(S_g) = 0$ pour tout $k \geq 3$, et ensuite, en notant e_i les générateurs des $H_1(\partial D_i^2)$ et f_i les générateurs des $H_1(C_i)$, qu'on oriente par exemple comme les e_1, \dots, e_g :

$$0 \rightarrow H_2(S_g) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbf{Z}e_i \xrightarrow{\alpha} H_1(X_g) \oplus \bigoplus_{i=1}^g \mathbf{Z}f_i \rightarrow H_1(S_g) \rightarrow H_0(U \cap V) \xrightarrow{\beta} H_0(U) \oplus H_0(V)$$

Tout d'abord, la flèche α est donnée par

$$e_i \mapsto \begin{cases} (e_i, f_i) & \text{si } i \leq g \\ (e_i, -f_{i-g}) & \text{si } g + 1 \leq i \leq 2g - 1 \\ (-e_1 - \dots - e_{2g-1}, -f_g) & \text{si } i = 2g \end{cases}$$

Ainsi, le noyau de α est engendré par le vecteur $e_1 + \dots + e_{2g}$, donc est isomorphe à \mathbf{Z} , d'où on conclut que $H_2(S_g) = \mathbf{Z}$.

L'image de α est engendrée par les vecteurs

$$(e_1, f_1), \dots, (e_g, f_g), (e_{g+1}, f_1), \dots, (e_{2g-1}, f_{g-1})$$

qui sont linéairement indépendants, et le quotient de $H_1(X_g) \oplus \bigoplus_{i=1}^g \mathbf{Z}f_i$ par $\text{im } \alpha$ est isomorphe à \mathbf{Z}^g .

D'autre part, $H_0(U \cap V) = \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbf{Z}[\partial D_i^2]$ est engendré par les classes de ses $2g$ composantes connexes, et l'application β est donnée en envoyant chaque composante sur 1 dans $H_0(U)$ puisque U est connexe par arcs, et sur la composante de $H_0(V) = \bigoplus_{i=1}^g [C_i]$ correspondant au cylindre qui la contient. On obtient donc

$$[\partial D_i^2] \mapsto (1, [C_{i \bmod g}])$$

pour tout i . Le noyau de cette application est donc $\bigoplus_{i=1}^g \mathbf{Z}([\partial D_i^2] - [\partial D_{i+g}^2])$.

Ainsi, nous avons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}^g \rightarrow H_1(S_g) \rightarrow \mathbf{Z}^g \rightarrow 0,$$

qui est scindée car tous les groupes qu'elle contient sont abéliens, donc $H_1(S_g) = \mathbf{Z}^{2g}$.

3. (a) On suppose $n \geq 1$. Enlever un point dans S_g correspond à enlever la 2-cellule dans la décomposition cellulaire de S_g , donc on se retrouve avec un bouquet de $2g$ cercles. De plus, chaque trou supplémentaire correspond à rajouter une diagonale, donc un cercle au bouquet. Ainsi, $S_g \setminus X$ est homotope à un bouquet de $(2g + n - 1)$ cercles, et on a donc $H_0(S_g \setminus X) \simeq \mathbf{Z}$, $H_1(S_g \setminus X) \simeq \mathbf{Z}^{2g+n-1}$ et $H_i(S_g \setminus X) = 0$ pour tout $i \geq 2$.

- (b) On observe que le quotient S_g/Y est homotope à un bouquet $S_g \vee (\bigvee^{m-1} S^1)$. On obtient $H_0(S_g/Y) \simeq \mathbf{Z}$, $H_1(S_g/Y) \simeq \mathbf{Z}^{2g+m-1}$, $H_2(S_g/Y) \simeq \mathbf{Z}$ et $H_i(S_g/Y; \mathbf{R}) = 0$ pour tout $i \geq 3$.
- (c) On suppose $n \geq 1$ et $m \geq 2$, les cas complémentaires étant traités par les questions précédentes. Alors $(S_g \setminus X)/Y$ est homotope à un bouquet de $(2g + n + m - 2)$ cercles. D'où les groupes d'homologie : $H_0((S_g \setminus X)/Y) \simeq \mathbf{Z}$, $H_1((S_g \setminus X)/Y) \simeq \mathbf{Z}^{2g+m+n-2}$ et $H_i((S_g \setminus X)/Y; \mathbf{Z}) = 0$ pour tout $i \geq 2$.

Exercice 11. Complémentaire d'un cercle

On va utiliser Mayer-Vietoris pour l'espace \mathbf{R}^3 , en prenant pour U un tore plein qui se rétracte par déformation sur S^1 , et pour $V = \mathbf{R}^3 \setminus S^1$. Alors $U \cap V$ se rétracte par déformation sur le tore T .

Par Mayer-Vietoris, on obtient directement $H_i(\mathbf{R}^3 \setminus S^1) = 0$ pour $i \geq 3$. Ensuite, en écrivant Mayer-Vietoris et en utilisant le fait que \mathbf{R}^3 soit contractile, on obtient des isomorphismes

$$H_2(T) \simeq H_2(S^1) \oplus H_2(\mathbf{R}^3 \setminus S^1)$$

et

$$H_1(T) \simeq H_1(S^1) \oplus H_1(\mathbf{R}^3 \setminus S^1).$$

Le premier donne $H_2(\mathbf{R}^3 \setminus S^1) \simeq H_2(T) = \mathbf{Z}$. Pour le deuxième on obtient

$$\mathbf{Z} \oplus H_1(\mathbf{R}^3 \setminus S^1) \simeq \mathbf{Z}^2.$$

Ainsi, $H_1(\mathbf{R}^3 \setminus S^1)$ est un groupe abélien de type fini sans torsion, donc isomorphe à \mathbf{Z} .

Exercice 12. Degré d'une application

1. Pour tout espace topologique X , une application $f : X \rightarrow X$ induit une application

$$f \times \text{id}_I : X \times I \rightarrow X \times I$$

qui passe au quotient en $Cf : CX \rightarrow CX$, qui est en fait même une application de paires $(Cf, f) : (CX, X) \rightarrow (CX, X)$. Elle induit donc un morphisme de complexes sur la suite exacte longue associée à la paire (Cf, f) : pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(CX) & \longrightarrow & H_{n+1}(CX, X) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(CX) \\ & & \downarrow (Cf)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (Cf)_* \\ H_{n+1}(CX) & \longrightarrow & H_{n+1}(CX, X) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(CX) \end{array}$$

Nous avons $CX/X = SX$, et par passage au quotient, l'application de paires (Cf, f) induit la suspension $f : SX \rightarrow SX$.

Comme on l'a vu dans l'exercice 6, les groupes d'homologie de l'espace contractile CX sont nuls, et l'application de paires $(CX, X) \rightarrow (SX, \text{pt})$ induit un isomorphisme $H_{n+1}(CX, X) \simeq H_{n+1}(SX)$, d'où un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(SX) & \xrightarrow{\sim} & H_n(X) \\ \downarrow (Sf)_* & & \downarrow f_* \\ H_{n+1}(SX) & \xrightarrow{\sim} & H_n(X) \end{array}$$

Ainsi, notant δ l'isomorphisme dans les lignes de ce carré, nous avons

$$(Sf)_* = \delta^{-1} f_* \delta.$$

Dans le cas où $X = S^n$, cela implique que $\text{deg } Sf = \text{deg } f$.

- 2.
- 3.
4. On rappelle (Feuille 2, Exercice 1 question 6) que si $f : S^n \rightarrow S^n$ est sans point fixe, alors f est homotope à l'application antipodale. Or l'application antipodale

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, \dots, -x_n)$$

est la composée de $(n + 1)$ réflexions

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Une telle réflexion est de degré -1 (on peut le voir par récurrence en utilisant la question 1), donc $\deg f = (-1)^{n+1}$.

5. **Groupe agissant librement** On rappelle que G agit librement sur un espace X signifie que pour tout $g \in G$ différent de 1, g agit par un homéomorphisme sans point fixe. Soient g, g' deux éléments non-triviaux de G . Puisque G agit librement, g et g' induisent des homeomorphismes $g, g' : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ sans points fixes. Ainsi, par la question précédente, $\deg g = \deg g' = -1$. Mais alors $\deg(g \circ (g')^{-1}) = 1$, et encore par la question précédente, l'homéomorphisme $g \circ (g')^{-1}$ doit avoir un point fixe. Puisque G agit librement, cela veut dire que le produit gg'^{-1} est égal à l'élément neutre 1, c'est-à-dire que $g = g'$. Ainsi, nous avons montré que G avait un seul élément non-trivial, donc $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

6. **Champs de vecteurs.**

- (a) Sur S^1 , on observe que la champ de vecteurs $v(x, y) = (-y, x)$ fonctionne. Ceci se généralise sans problème à toute sphère de dimension impaire $n = 2k - 1$:

$$v(x_1, \dots, x_{2k}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

- (b) Soit $x \mapsto v(x)$ un tel champ de vecteurs, qui ne s'annule pas. Alors quitte à le diviser par le norme $\|v(x)\|$, on peut de plus supposer que pour tout x , $v(x)$ est unitaire. On définit alors l'application

$$H(x, t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)v(x).$$

Pour tout t et pour tout x , $H(x, t)$ est bien un point de S^n puisque $v(x)$ est un vecteur unitaire orthogonal à x . On obtient ainsi homotopie entre l'identité et l'application antipodale. Or cette dernière est de degré $(-1)^{n+1} = -1$ puisque n est impair. Contradiction.

Exercice 13. Homologie de quelques espaces « pathologiques »

1. Pour la droite à deux origines D , obtenue en recollant deux copies de \mathbf{R} suivant \mathbf{R}^* , on prend pour ouverts les images U et V des deux copies de \mathbf{R} . Alors U et V sont contractiles et $U \cap V$ est homotope à deux points. On obtient donc par Mayer-Vietoris en homologie réduite : $H_i(D) = 0$ pour $i \geq 2$, et

$$0 \rightarrow H_1(D) \rightarrow \tilde{H}_0(U \cap V) \rightarrow 0$$

de sorte que $H_1(D) = \mathbf{Z}$. Enfin, $H_0(D) = \mathbf{Z}$.

Pour la droite à n origines D_n , obtenue en recollant n copies de \mathbf{R} suivant \mathbf{R}^* , on procède par récurrence en prenant pour U l'image de $(n - 1)$ copies de \mathbf{R} et pour V l'image de la copie de \mathbf{R} restante. On suppose par hypothèse de récurrence que

$$H_1(U) = \mathbf{Z}^{n-1} \quad \text{et} \quad H_i(U) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geq 2.$$

On a de nouveau $U \cap V = \mathbf{R}^*$ homotope à deux points. On écrit donc la suite exacte de Mayer-Vietoris en homologie réduite :

$$0 \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(D_n) \rightarrow \tilde{H}_0(U \cap V) \rightarrow 0$$

Autrement dit, on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}^{n-1} \rightarrow H_1(D_n) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

qui est scindée car \mathbf{Z} est abélien libre (cf feuille 6 exercice 3). Donc $H_1(D_n) = \mathbf{Z}^n$. Enfin, on a $H_i(D_n) = 0$ pour $i \geq 2$, et $H_0(D_n) = \mathbf{Z}$.

2. Cet espace Γ a deux composantes connexes par arcs contractiles : le segment $\{0\} \times [-1; 1]$ ainsi que le graphe de la fonction, qui est homéomorphe à $\mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$ via la projection sur l'axe des abscisses. On a donc $H_i(\Gamma) = 0$ pour $i \geq 1$ et $H_0(\Gamma) = \mathbf{Z}^2$.

Exercice 14. Théorème de Hurewicz

- 1.
- 2.
- 3.
4. Ce morphisme est bien défini par la question 3, et c'est un morphisme de groupes par la question 2.
5. Commençons par montrer la surjectivité de ϕ . Soit $\sigma = \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$ un 1-cycle, c'est-à-dire un élément de $C_1(X; \mathbf{Z})$ de bord nul. En autorisant certains σ_i à être égaux, on peut supposer que pour tout i , $n_i = \pm 1$. Ensuite, puisque $-\sigma_i$ est homologue à $\bar{\sigma}_i$ (le chemin σ_i parcouru en sens inverse), nous pouvons supposer que les n_i sont en fait tous égaux à 1. Nous avons par hypothèse

$$\sum_{i=1}^k (\sigma_i(1) - \sigma_i(0)) = \partial\sigma = 0,$$

dans le groupe abélien libre $C_0(X; \mathbf{Z})$. En particulier, si σ_i n'est pas un lacet, il existe nécessairement un $j \neq i$ tel que $\sigma_j(0) = \sigma_i(1)$, de sorte que les lacets σ_i et σ_j soient composables. Mais alors d'après la question 2. on peut remplacer $\sigma_i + \sigma_j$ par leur concaténé $\sigma_i \sigma_j$ sans changer la classe d'homologie du 1-cycle considéré. En poursuivant ce processus par récurrence, on se ramène au cas où tous les σ_i sont des lacets. Il reste à en faire des lacets en x_0 . Pour cela, pour tout $x \in X$, par connexité par arcs, on choisit un chemin ℓ_x reliant x_0 à x (constant si $x_0 = x$). Alors $\ell_{\sigma(0)} \sigma \overline{\ell_{\sigma(1)}}$ est homologue à σ_i pour tout i , donc on peut supposer que chaque σ_i est un lacet en x_0 . Finalement, le cycle σ est homologue à l'image du lacet $\sigma_1 \dots \sigma_k$.

Montrons maintenant que le noyau de ϕ est exactement l'ensemble des commutateurs

$$[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

Tout d'abord, comme $H_1(X; \mathbf{Z})$ est abélien, ϕ se factorise par celui-ci, pour donner un morphisme surjectif

$$\phi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \rightarrow H_1(X; \mathbf{Z})$$

que nous noterons $\tilde{\phi}$. Nous allons construire un morphisme $\tilde{\psi}$ dans l'autre sens tel que $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi} = \text{id}$, ce qui impliquera que $\tilde{\phi}$ est injectif. On utilisera la notation additive pour les éléments de $\phi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$.

On conserve la notation ℓ_x introduite ci-dessus. Par propriété universelle des produits abéliens libres, l'application qui à tout 1-simplexe singulier σ associe la classe dans $\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$ du lacet $\ell_{\sigma(0)}\sigma\overline{\ell_{\sigma(1)}}$ s'étend en un morphisme de groupes

$$\psi : C_1(X; \mathbf{Z}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}.$$

Faisons quelques remarques à propos de ce morphisme :

- (a) Puisque nous avons choisi ℓ_{x_0} constant, un lacet en x_0 est envoyé exactement sur sa classe dans $\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$.
- (b) Pour tout σ , nous avons

$$\psi(\bar{\sigma}) = -\psi(\sigma).$$

En effet, la classe du lacet $\ell_{\sigma(1)}\bar{\sigma}\overline{\ell_{\sigma(0)}}$ est l'inverse de la classe de ce lacet parcouru dans l'autre sens, à savoir $\ell_{\sigma(0)}\sigma\overline{\ell_{\sigma(1)}}$.

- (c) Pour tous les 1-simplexes singuliers σ, τ tels que $\sigma(1) = \tau(0)$, l'image de $\sigma\tau$ est la classe de

$$\ell_{\sigma(0)}\sigma\tau\overline{\ell_{\tau(1)}},$$

qui est homotope à la concaténation

$$\ell_{\sigma(0)}\sigma\overline{\ell_{\sigma(1)}}\ell_{\tau(0)}\tau\overline{\ell_{\tau(1)}},$$

de sorte qu'on a $\psi(\sigma\tau) = \psi(\sigma) + \psi(\tau)$.

Revenons à la démonstration. Nous devons montrer que ψ passe au quotient par l'image de l'application de bord ∂ . Soit donc $c : \Delta^2 \rightarrow X$ un 2-simplexe. Alors son bord est

$$\partial c = c \circ T_{(e_1, e_2)} - c \circ T_{(e_0, e_2)} + c \circ T_{(e_0, e_1)}.$$

D'après les remarques (b) et (c), l'image de ∂c par ψ est égale à celle du lacet

$$c \circ T_{(e_1, e_2)}\overline{c \circ T_{(e_0, e_2)}}c \circ T_{(e_0, e_1)}$$

Puisque Δ^2 se rétracte par déformation sur e_1 , ce lacet est homotope au lacet constant égal à $c(e_1)$, et l'image de ce lacet par ψ est triviale. Finalement, ψ induit donc un morphisme

$$\tilde{\psi} : H_1(X; \mathbf{Z}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}.$$

D'autre part, d'après la remarque (a), nous avons bien $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi} = \text{id}$.