TD : feuille n°8
Homologie cellulaire

Exercice 1. Espaces projectifs

Exercice 2. Surfaces classiques

Exercice 3. Points antipodaux

1. Une décomposition cellulaire est donnée en prenant une 0-cellule e^0, une 1-cellule e^1, puis deux 2-cellules D_+ et D_- dont le bord est recollé sur la 1-squelette S^1 suivant l'application $z \mapsto z^2$, dont le degré est 2 (autrement dit, cet espace est $\mathbf{RP}^1$ sur lequel on a recollé deux 2-cellules suivant $S^1 \to S^1/\{\pm 1\}$, c'est-à-dire c'est $\mathbf{RP}^2$ avec une 2-cellule supplémentaire). Ainsi, le complexe cellulaire s'écrit
$$0 \to \mathbf{Z}[D_+] \oplus \mathbf{Z}[D_-] \xrightarrow{f} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0$$
l'application f étant donnée par $[D_+] \mapsto 2$ et $[D_-] \mapsto 2$. Ainsi, les groupes d'homologie sont
$$H_0(X;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}, \quad H_1(X;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \quad H_2(X;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z},$$
et $H_k(X;\mathbf{Z}) = 0$ pour $k \geq 3$.
2. Cet espace est $\mathbf{RP}^2$ sur lequel on a recollé deux 3-cellules D_+ et D_- suivant l'application quotient $S^2 \to S^2/\{\pm 1\}$, c'est-à-dire $\mathbf{RP}^3$ avec une 3-cellule supplémentaire. On en déduit le complexe cellulaire
$$0 \to \mathbf{Z}[D_+] \oplus \mathbf{Z}[D_-] \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0$$
D'où les groupes d'homologie
$$H_0(X;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}, \quad H_1(X;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \quad H_2(X;\mathbf{Z}) = 0, \quad H_3(X;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^2$$
et $H_k(X;\mathbf{Z}) = 0$ pour $k \geq 4$.

Exercice 4. Espaces de Moore

1.
2.
3. Soit $(g_i)_{i\in I}$ une famille de générateurs de G. On a une suite exacte courte
$$0 \to K \to \mathbf{Z}^{(I)} \to G \to 0$$
où K est le noyau de l'application canonique $\mathbf{Z}^{(I)} \to G$. En tant que sous-groupe d'un groupe abélien libre, K est abélien libre également, de la forme $\mathbf{Z}^{(J)}$, avec des générateurs $(h_j)_{j\in J}$. On écrit $h_j = \sum_{i\in I} d_{j,i} g_i$.
Notre espace est construit comme suit : On prend une 0-cellule, et on y recolle une n-cellule pour chaque $i \in I$: on obtient un bouquet $\bigvee_{i\in I} S^n_i$. Ensuite, pour tout $j \in J$, on va attacher une $(n+1)$ -cellule e^{n+1}_j par l'application $S^n \to \bigvee_i S^n_i$ suivante : le complémentaire de $\sum_i |d_{j,i}|$ disques D^n est envoyé sur la 0-cellule, de sorte que l'application à définir devient une application du bouquet de $\sum_i |d_{j,i}|$ sphères S^n vers le bouquet $\bigvee_{i\in I} S^n_i$. Puis, pour tout $i \in I$, on envoie $|d_{j,i}|$ de ces sphères sur S^n_i, avec l'identité si $d_{j,i} > 0$, et avec une application de degré -1 sinon. On vérifie que cela donne bien un complexe cellulaire dont toutes les applications sont nulles, sauf d_{n+1} qui est exactement l'inclusion $K \to \mathbf{Z}^I$ ci-dessus, d'où le résultat.
4. Le bouquet $\bigvee_{i\geq 1} M(G_i, i)$ convient.

Exercice 5. Homologie avec coefficients

1.
2.
3. Le plan projectif et le point.
4. Le plan projectif et le bouquet $S^1 \vee S^2$

Exercice 6. Caractéristique d'Euler

1. Cela vient de l'exercice 5 de la feuille 6 appliqué au complexe de chaînes cellulaires de X à coefficients dans F. Notons qu'en particulier cela implique que χ ne dépend pas de la décomposition cellulaire choisie.
2. On a $\chi(S_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$ et $\chi(S'_g) = 1 - g + 1 = 2 - g$.
3. Soit $f : S_h \to S_g$ un revêtement à d feuillets (par compacité le nombre de feuillets doit être fini). L'intérieur de la 2-cellule de S_g est simplement connexe, donc c'est un ouvert trivialisant : son image réciproque par f est une réunion disjointe de d disques ouverts. Reste à comprendre f sur le 1-squelette, qui est un graphe : par le même raisonnement, l'image réciproque des intérieurs des 1-cellules est une union d'arêtes ouvertes. Finalement, l'image réciproque de chaque 0-cellule est constituée de d points. Ainsi, f détermine une décomposition cellulaire sur S_h, telle que $\chi(S_h) = d\chi(S_g)$.

   Ainsi, nous devons avoir la relation $1-h = d(1-g)$, donc h doit être de la forme $h = 1+d(g-1)$. (En particulier, on retrouve le fait que la seule surface compacte qui revêt le tore est le tore lui-même).

   Réciproquement, si $h = 1 + d(g-1)$, construisons un revêtement à d feuillets de S_g par S_h. On démarre avec un revêtement à d feuillets du tore S_1 par lui-même. L'image réciproque d'un petit disque du tore sera l'union disjointe de d petits disques, si bien que nous avons un revêtement à d feuillets du tore privé d'un disque par le tore privé de d disques.

   La surface S_g est obtenue à partir du tore en enlevant un petit disque à S_1 et à S_{g-1} et en recollant les deux surfaces trouées suivant le bord de leur trou. On recolle de même une copie de S_{g-1} privée d'un disque sur le bord de chaque trou du tore privé de d disques, de sorte à obtenir S_h. Notre revêtement ci-dessus se prolonge alors de manière naturelle en un revêtement de S_g par S_h, en envoyant chaque copie de S_{g-1} privée d'un disque dans S_h identiquement sur la copie de S_{g-1} privée d'un disque dans S_g.
4.
5. Soient $X = \bigcup_{n\geq 0} \bigcup_i e_i^n$ et $Y = \bigcup_{n\geq 0} \bigcup_j f_j^n$ des décompositions cellulaires de X et Y, avec $(\phi_i^n)_{i,n}$ et $(\psi_{i,j})_{i,n}$ les applications caractéristiques correspondantes. Montrons alors qu'en définissant les n-cellules de $X \times Y$ comme étant les produits $e_i^k \times f_j^{n-k}$ pour tous i, j et pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on définit bien une structure de complexe cellulaire. Pour une telle cellule, on a une application
$$\phi_i^k \times \psi_j^{n-k} : \bar{D}^k \times \bar{D}^{n-k} \to X \times Y.$$
   On peut trouver un homéomorphisme $\bar{D}^k \times \bar{D}^{n-k} \simeq \bar{D}^n$ qui induit des homéomorphismes
$$D^k \times D^{n-k} \simeq D^n,$$
   et
$$(\partial\bar{D}^k) \times \bar{D}^{n-k} \cup \bar{D}^k \times \partial\bar{D}^{n-k} \to \partial\bar{D}^n.$$
   (Pour s'en convaincre, remplacer toutes les boules par des cubes : on a un homéomorphisme canonique $I^k \times I^{n-k} \to I^n$, et un point appartient à la frontière de I^n si et seulement si au

moins une de ses coordonnées vaut 0 ou 1. Si cette coordonnée est parmi les k premières, alors il appartient à $(\partial I^k) \times I^{n-k}$, sinon il appartient à $I^k \times (\partial I^{n-k})$.)
Ainsi, $\phi_i^k \times \psi_j^{n-k}$ fournit bien une application caractéristique $\bar{D}^n \to X$ dont la restriction à $\mathrm{Int}(\bar{D}^n)$ induit un homéomorphisme avec $e_i^k \times f_j^{n-k}$. De plus, l'image de $\partial \bar{D}^n$ est

$$\phi_i^k(\partial \bar{D}^k) \times \psi_j^{n-k}(\bar{D}^{n-k}) \cup \phi_i^k(\bar{D}^k) \times \psi_j^{n-k}(\partial \bar{D}^{n-k}),$$

qui est bien contenue dans une union finie de cellules de dimension au plus $n-1$. On vérifie également que la topologie est la bonne. La vérification de l'identité $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ est alors immédiate.

Exercice 7. Homologie cellulaire d'un produit

D'après la dernière question de l'exercice précédent, $S^n \times S^m$ peut se munir , si $n > m$, d'une structure de complexe cellulaire avec une 0-cellule, une m-cellule, une n-cellule et une $n+m$-cellule. Si $n = m$, on aura une 0-cellule, deux n-cellules et une $2n$-cellule. On obtient alors bien des résultats conformes à ceux trouvés dans l'exercice 9 de la feuille 7.