TD : feuille n°9
Cohomologie

Exercice 1. Quelques calculs de cohomologie

Calculer la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des espaces suivants :

(a) le tore $S^1 \times S^1$.

(b) la bouteille de Klein.

(c) pour $m \geq 1$ et $n \geq 1$ entiers, l'espace obtenu en recollant le bord d'une $(n+1)$-cellule sur la sphère S^n suivant une application de degré m.

Comparer avec l'homologie de ces mêmes espaces. Que remarque-t-on ?

Exercice 2. Vers le théorème des coefficients universels

Soit X un espace topologique. Les groupes de cohomologie $H^*(X;G)$ sont définis à partir du complexe de cochaînes $C^*(X;G) = \mathrm{Hom}(C_*(X;Z), G)$. Il est naturel de se demander à quel point les groupes $H^*(X;G)$ diffèrent des groupes $\mathrm{Hom}(H_*(X;\mathbf{Z});G)$. Montrer les résultats suivants :

1. Pour tout G et tout $n \geq 0$, on a un morphisme surjectif $H^n(X;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X;\mathbf{Z}), G)$.
2. Ce morphisme est un isomorphisme pour $n = 0$ et $n = 1$.
3. Ce morphisme est un isomorphisme dans le cas où G est un corps de caractéristique nulle.

Exercice 3. Cup-produit

Soit X un espace topologique, dont on note $(C^*(X), \delta)$ le complexe de cochaînes singulières à coefficients dans un anneau R. Montrer les propriétés suivantes du cup-produit au niveau des cochaînes :

1. (Compatibilité avec le cobord) Pour tout $(a,b) \in C^p(X) \times C^q(X)$,
$$\delta(a \smile b) = \delta a \smile b + (-1)^p a \smile \delta b.$$
2. (Associativité) Pour tout $(a,b,c) \in C^p(X) \times C^q(X) \times C^r(X)$,
$$a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \smile c.$$
3. (Fonctorialité) Soit Y un espace topologique, $g : X \to Y$ une application continue, et $g^\sharp : C^*(Y) \to C^*(X)$ le morphisme de complexes induit. Alors, pour tout $(a,b) \in C^p(Y) \times C^q(Y)$, on a
$$g^\sharp(a) \smile g^\sharp(b) = g^\sharp(a \smile b).$$
Si $h : R \to R'$ est un morphisme d'anneaux, alors, pour tout $(a,b) \in C^p(X) \times C^q(X)$, on a
$$h \circ (c_1 \smile c_2) = (h \circ c_1) \smile (h \circ c_2).$$
4. Formuler et démontrer les propriétés du cup-produit cohomologique similaires aux propriétés 2 et 3 ci-dessus.

Exercice 4. Anti-commutativité du cup-produit

Soit X un espace topologique. Le but de cet exercice est de donner une preuve de l'identité

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{pq} \beta \smile \alpha$$

pour tout $\alpha \in H^p(X; R)$ et $\beta \in H^q(X; R)$.

Pour tout n-simplexe singulier σ, on note $\bar{\sigma}$ le simplexe inversé $\sigma \circ \omega$, où $\omega : \Delta^n \to \Delta^n$ est l'application affine qui envoie tout sommet e_i du n-simplexe standard Δ^n sur e_{n-i}. Pour tout $n \geq 0$, on définit un morphisme $\rho_n : C_n(X) \to C_n(X)$ en posant $\rho(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{\sigma}$

1. Montrer que les morphismes ρ_n forment un morphisme de complexes $\rho : (C_*, \partial) \to (C_*, \partial)$.
2. Montrer que ce morphisme de complexes est homotope à l'identité.
3. Conclure.

Exercice 5. Cap-produit

Soient $k \geq \ell \geq 0$ des entiers. Montrer que, pour tout k-simplexe singulier σ de X et pour toute ℓ-cochaîne singulière $c \in C^\ell(X; G)$, on a

$$\partial(\sigma \frown c) = (-1)^\ell (\partial\sigma \frown c - \sigma \frown \delta c).$$

Exercice 6. Caractéristique d'Euler-Poincaré en dimension impaire

Montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété fermée de dimension impaire est nulle.

Exercice 7. Orientabilité des variétés topologiques simplement connexes

Montrer qu'une variété topologique simplement connexe est orientable.