TD : feuille n°9
Cohomologie

Exercice 1. Quelques calculs de cohomologie

Exercice 2. Vers le théorème des coefficients universels

1. On note $C_n(X;\mathbf{Z})$ le groupe des chaînes cellulaires de X, Z_n, B_n respectivement les groupes des cycles et des bords dans $C_n(X;\mathbf{Z})$, ainsi que $Z^n(X;G), B^n(X;G)$ respectivement les groupes des cocycles et cobords dans le groupe des cochaînes cellulaires $C^n(X;G) = \mathrm{Hom}(C_n(X;\mathbf{Z});G)$. Par définition du cobord, pour $f \in C^n(X;G)$, nous avons
$$\begin{aligned} \delta(f)=0 \quad &\text{ssi} \quad \forall \sigma \in C_{n+1}(X;\mathbf{Z}),\ \delta f(\sigma)=0 \\ &\text{ssi} \quad \forall \sigma \in C_{n+1}(X;\mathbf{Z}), f(\partial\sigma)=0 \\ &\text{ssi} \quad f(B_n)=0. \end{aligned}$$
Ainsi,
$$Z^n(X;G) = \{f \in C^n(X;G),\ \delta f = 0\} = \{f \in \mathrm{Hom}(C_n(X;\mathbf{Z});G), f_{|B_n} = 0\}.$$
D'autre part,
$$\mathrm{Hom}(H_n(X;\mathbf{Z});G) = \mathrm{Hom}(Z_n/B_n;G) = \{f \in \mathrm{Hom}(Z_n;G), f_{|B_n} = 0\}.$$
Ainsi, la restriction à Z_n induit un morphisme $Z^n(X;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X;\mathbf{Z});G)$. D'autre part, si $f = \delta g \in B^n(X;G)$, alors pour tout $\sigma \in Z_n$, on a $f(\sigma) = \delta g(\sigma) = g(\partial\sigma) = 0$, donc f s'annule sur Z_n. Ainsi, le morphisme ci-dessus passe au quotient pour donner un morphisme
$$H^n(X;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X;\mathbf{Z});G).$$
Puisque celui-ci a été défini par restriction de C_n à Z_n, pour montrer qu'il est surjectif il suffit de montrer que tout $f \in \mathrm{Hom}(Z_n;G)$ vérifiant $f_{|B_n} = 0$ se prolonge en un morphisme de groupes défini sur C_n tout entier, à valeurs dans G. Pour cela, observons que le morphisme de bord induit une suite exacte courte
$$0 \to Z_n(X;\mathbf{Z}) \to C_n(X;\mathbf{Z}) \to B_{n-1}(X;\mathbf{Z}) \to 0$$
Le groupe $B_{n-1}(X;\mathbf{Z})$ est abélien libre, comme sous-groupe du groupe abélien libre $C_{n-1}(X;\mathbf{Z})$. Ainsi, cette suite exacte est scindée, et $C_n(X;Z)$ est isomorphe à la somme directe $Z_n \oplus B_{n-1}$. Il en résulte que le prolongement peut être fait dans tous les cas, à partir d'une application arbitraire d'un ensemble de générateurs de B_{n-1} vers G.
2. Pour $n=0$, nous avons $C_0(X;\mathbf{Z}) = Z_0(X;\mathbf{Z})$, donc si $f \in Z^0(X;G)$ a sa restriction à $Z_0(X;\mathbf{Z})$ nulle, elle est elle-même nulle, d'où l'injectivité du morphisme.
En général, pour montrer l'injectivité de notre morphisme pour un certain n, il s'agit de montrer que si la restriction d'un morphisme de groupes $f : C_n \to G$ à Z_n est nulle, alors f est un cobord. Supposons donc donné un tel f. Si on avait $f = \delta g$ avec $g \in C^{n-1}(X;G)$, la seule contrainte que cela impose sur g, c'est que pour tout $\sigma \in C_n(X;\mathbf{Z})$, $f(\sigma) = \delta g(\sigma) = g(\partial\sigma)$ Ainsi, les valeurs de g sur B_{n-1} sont imposées. Il reste à voir si on peut la prolonger à C_{n-1} tout entier (et d'après l'argument ci-dessus, cela équivaut à savoir prolonger à Z_{n-1}). En général, cela n'est pas toujours possible : par exemple, pour $\mathbf{RP}^2$, on a vu que le complexe cellulaire était donné par
$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0$$

si bien que $B_1 = 2\mathbf{Z} \subset Z_1 = \mathbf{Z}$, et par exemple le morphisme $B_1 \to \mathbf{Z}$ envoyant 2 sur 1 ne peut être prolongé à Z_1 (sans que son image ne sorte de $\mathbf{Z}$). Plus généralement, nous avons la suite exacte courte

$$0 \to B_{n-1} \to Z_{n-1} \to H_{n-1}(X;\mathbf{Z}) \to 0$$

Dans le cas particulier où $n = 1$, $H_0(X;\mathbf{Z})$ est abélien libre, et donc cette suite exacte est scindée et on peut prolonger, ce qui conclut la preuve du point 2.

En général, un élément de torsion dans $H_{n-1}(X;\mathbf{Z})$ se relève en un élément $a \in Z_{n-1}$ dont un certain multiple est dans B_{n-1} : il n'est donc pas garanti en général de pouvoir lui assigner une valeur dans G. Ainsi, les éléments de torsion dans $H_{n-1}(X;\mathbf{Z})$ fournissent des obstructions à l'existence de notre morphisme g.

3. Cette obstruction n'en est pas une dans le cas où le groupe G est divisible, c'est-à-dire si pour tout $x \in G$ et pour tout entier $k \geq 2$, il existe $y \in G$ tel que $ky = x$. C'est en particulier le cas lorsque G est un corps de caractéristique nulle : on peut alors prolonger g à Z_{n-1} de la manière suivante : on choisit un système de générateurs du groupe abélien libre Z_{n-1}. Pour un générateur $a \in Z_{n-1}$, s'il existe k tel que $ka \in B_{n-1}$, on prend le k minimal vérifiant cela, et on pose $g(a) = \frac{1}{k}g(ka)$. Sinon, on choisit une valeur arbitraire pour $g(a)$.

Exercice 3. Cup-produit

Exercice 4. Anti-commutativité du cup-produit

Cf. Hatcher Théorème 3.14 (pages 215-217)

Exercice 5. Cap-produit

Cf. Hatcher p. 240

Exercice 6. Caractéristique d'Euler-Poincaré en dimension impaire

La caractéristique d'Euler-Poincaré de la variété M peut être calculée par la formule

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H_i(M;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

(cf feuille 8, exercice 6). Par le même raisonnement, elle peut également être calculée via les groupes de cohomologie :

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(M;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Une variété étant toujours $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-orientable, nous pouvons appliquer l'isomorphisme de Poincaré pour écrire

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^{n-i}(M;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = -\chi(M),$$

d'où $\chi(M) = 0$.

Exercice 7. Orientabilité des variétés topologiques simplement connexes

On sait que pour une variété non-orientable M, on dispose d'un revêtement double non-trivial $\tilde{M} \to M$ avec $\tilde{M}$ orientable, ce qui est impossible si M simplement connexe.