Théorie des graphes

22 novembre 2014

Pour un cours plus complet sur les graphes, nous renvoyons vers le polycopié de P. Bornsztein disponible à l'adresse

`http://www.animath.fr/IMG/pdf/cours-graphes.pdf`

1 Notion de graphe

Un *graphe* c'est
– des *sommets* ;
– des *arêtes* reliant des sommets.
Nous allons travailler avec des graphes *simples*, c'est-à-dire tels que deux sommets ne sont jamais reliés par plus d'une arête, et *finis*, c'est-à-dire ayant un nombre fini de sommets et d'arêtes. De plus, nos graphes n'auront pas de boucles, c'est-à-dire qu'un sommet n'est jamais relié à lui-même.

Pour tout n, on note K_n le graphe *complet* à n sommets, c'est-à-dire le graphe à n sommets tel que chacun de ses sommets est relié à tous les autres.
Exercice 1 Dessiner les graphes K_1, K_2, K_3, K_4, K_5. Combien ont-ils de sommets ? D'arêtes ?

Un *chemin* entre deux sommets A et B est une suite d'arêtes reliant A et B. La *longueur* d'un chemin est le nombre d'arêtes qu'il contient. Un graphe est dit *connexe* si deux sommets quelconques peuvent toujours être reliés par un chemin. Un chemin qui parcourt au moins trois arêtes distinctes et qui revient sur lui-même s'appelle un *cycle*. Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.
Exercice 2

1. Montrer que dans un arbre, il existe un seul chemin entre deux sommets donnés.
2. Montrer qu'un arbre ayant strictement plus d'un sommet possède nécessairement au moins un sommet de degré un.
3. Montrer par récurrence qu'un arbre à n sommets a nécessairement $n-1$ arêtes.

Exercice 3 Trois maisons doivent être reliées chacune à l'eau, au gaz, et à l'électricité. Dessiner un graphe pour illustrer une configuration possible. Pensez-vous qu'on puisse se débrouiller pour que les différentes conduites ne se croisent pas ?

Un graphe comme celui qui apparaît dans l'exercice précédent est appelé graphe *bipartite*. Plus précisément, un graphe bipartite est un graphe tel qu'on peut séparer l'ensemble de ses sommets en deux groupes I et J de telle sorte que deux sommets appartenant à un même groupe ne soient jamais reliés (on dit que I et J sont des ensembles de sommets indépendants). Si tous les sommets de I sont reliés à tous les sommets de J, on dit que le graphe bipartite est complet, et on le note $K_{m,n}$ où m est le cardinal de I et n le cardinal de J. Le graphe de l'exercice précédent correspond alors à $K_{3,3}$.
Exercice 4 Dessiner $K_{2,2}$ et $K_{3,4}$.

2 Degré d'un sommet, lemme des poignées de mains

Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.

Exercice 5 (Lemme des poignées de mains) Montrer que la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe G est égale au double du nombre d'arêtes du graphe. Autrement dit, en notant a le nombre d'arêtes de G :

$$2a = \sum_{x \text{ sommet de } G} d(x).$$

Exercice 6 Chaque membre du club Parimaths serre la main d'un certain nombre d'autres membres du club. Montrer que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.

Exercice 7 Parmi les 30 élèves d'une classe, certains sont amis, et d'autres ne le sont pas. Montrer qu'il y a deux élèves ayant le même nombre d'amis.

3 Graphes planaires

Un graphe est dit *planaire* si on peut le dessiner sans que ses arêtes se coupent (ailleurs qu'en les sommets, bien évidemment). Une telle manière de le dessiner s'appelle une *représentation planaire*. On voit donc que la question posée dans l'exercice 3 revient à celle de savoir si le graphe intervenant dans l'exercice est planaire. Attention : ce n'est pas parce qu'une des représentations du graphe n'est pas planaire qu'il est impossible de le dessiner de manière planaire.

Soit un graphe planaire. Alors ses arêtes délimitent des régions du plan que nous appellerons *faces*.

Théorème 1. (Formule d'Euler, 1758) Soit G un graphe planaire et connexe. Supposons qu'une représentation planaire de G possède s sommets, a arêtes et f faces. Alors

$$s - a + f = 2.$$

Remarque 2. Attention, si le graphe est fini, l'une des faces du graphe est infinie !

On sent bien que, si un graphe a trop d'arêtes par rapport à son nombre de sommets, on va avoir du mal à le dessiner sans que ses arêtes se croisent. Plus précisément, nous aurons :

Proposition 3. Soit G un graphe planaire et connexe à s sommets et a arêtes. Alors

$$a \leq 3s - 6.$$

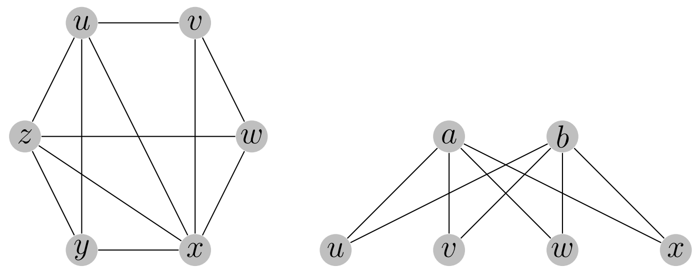
Cette proposition nous fournit une manière de montrer qu'un graphe connexe n'est pas planaire : s'il ne vérifie pas l'inégalité, il ne peut être planaire. En revanche, il faut faire attention au fait qu'un graphe peut très bien vérifier l'inégalité, et tout de même ne pas être planaire (autrement dit, la réciproque de ce résultat n'est pas vraie).

Exercice 8 Inspirez-vous de la preuve de cette proposition pour montrer que si G est un graphe connexe à s sommets et a arêtes planaire ne contenant pas de cycles de longueur 3 (on dit qu'il est « sans triangle »), alors $a \leq 2s - 4$.

Exercice 9

1. Montrer que le graphe complet K_4 est planaire, et que le graphe complet K_5 ne l'est pas. Vérifier la formule d'Euler pour K_4.

2. Les graphes suivants



sont-ils planaires ? Si oui, vérifier la formule d'Euler pour ces derniers.

3. Résoudre la deuxième question de l'exercice 3.

4 Coloriages

Un *coloriage* du graphe G est une manière d'attribuer une couleur à chacun de ses sommets. On dit qu'un coloriage est *propre* si deux sommets reliés par une arête ont des couleurs différentes. Le graphe G étant fini, on peut définir le *nombre chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe fini G comme le plus petit nombre n tel que G puisse être colorié avec n couleurs.

Exercice 10

1. A quoi ressemble un graphe de nombre chromatique 1 ?
2. Quel est le nombre chromatique d'un arbre ? D'un graphe bipartite ?
3. Quel est le nombre chromatique d'un graphe complet ?

Exercice 11

1. Soit G un graphe planaire. Montrer que G possède au moins un sommet de degré ne dépassant pas 5. Indication : le fait que G soit planaire est très important.
2. Montrer le théorème des 6 couleurs : tout graphe planaire G a un nombre chromatique inférieur ou égal à 6. Indication : raisonner par récurrence sur le nombre de sommets de G.

L'algorithme glouton Il existe beaucoup d'algorithmes pour trouver un coloriage propre d'un graphe fini. Nous allons présenter ici le plus connu, l'algorithme glouton (appelé ainsi probablement en référence au fait qu'il cherche toujours le sommet qui a le plus grand degré). Cet algorithme se déroule de la manière suivante.

1. On choisit un sommet non encore colorié de degré maximal et on le colorie d'une nouvelle couleur.
2. On colorie de cette même couleur, par ordre décroissant des degrés, tous les sommets non encore coloriés qui ne sont pas reliés à ce sommet, ni reliés entre eux. Plus précisément, on colorie un sommet de degré maximal non colorié et non relié au sommet colorié dans l'étape 1. Ensuite on colorie un sommet de degré maximal et non relié ni au sommet qu'on vient de colorier, ni au sommet colorié dans l'étape 1, et ainsi de suite.
3. S'il reste encore des sommets à colorier, on reprend à l'étape 1.

Cette procédure termine forcément puisque le nombre de sommets coloriés augmente au moins d'un à chaque fois.

Remarque 4. Il faut faire attention au fait que l'algorithme glouton ne permet pas nécessairement de calculer le nombre chromatique d'un graphe : il propose un certain coloriage propre, qui n'est pas nécessairement minimal.

Exercice 12 A l'aide de l'algorithme glouton, proposer un coloriage du premier graphe de la deuxième question de l'exercice 9. En déduire son nombre chromatique.

Exercice 13 Montrer grâce à l'algorithme glouton que le nombre chromatique $\chi(G)$ d'un graphe fini G vérifie

$$\chi(G) \leq D(G) + 1,$$

où $D(G)$ est le degré maximal d'un sommet de G.

5 Graphes sans triangle

Nous allons appeler *triangle* dans un graphe G tout ensemble de 3 sommets de G reliés deux à deux par des arêtes. Il est naturel de penser qu'à un nombre de sommets fixé, un graphe qui a beaucoup d'arêtes contient forcément un triangle. C'est ce que nous allons formaliser ici.

Exercice 14

1. Quel est le nombre maximal d'arêtes que peut avoir un graphe à 4 sommets sans triangle ?
2. Soit G un graphe à 5 sommets sans triangle. Montrer qu'il admet un sommet de degré au plus 2.
3. En déduire le nombre maximal d'arêtes que peut avoir un graphe à 5 sommets sans triangle.

Plus généralement, nous allons prouver le résultat suivant :

Exercice 15 (Théorème de Mantel-Turán) Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Mantel (1907) : un graphe G à n sommets ne contenant aucun triangle a au plus $\frac{n^2}{4}$ arêtes, l'égalité étant atteinte quand n est pair et $G = K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.

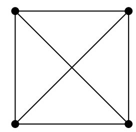
1. Soit I un ensemble de sommets indépendants (c'est-à-dire tel que deux d'entre eux ne soient jamais reliés par une arête) de taille maximale, et soit x cette taille. Montrer que le degré de tout sommet de G est inférieur ou égal à x.
2. Soit J l'ensemble des sommets de G qui ne sont pas dans I. Montrer que le nombre a des arêtes de G vérifie
$$a \leq \sum_{A \in J} d(A).$$
3. Justifier que pour tous réels x, y on a $4xy \leq (x+y)^2$.
4. En déduire le résultat souhaité, avec le cas d'égalité.

C'est Mantel qui a prouvé ce théorème en premier en 1907. Le mathématicien hongrois Turán l'a généralisé en 1941 en montrant qu'un graphe à n sommets ne contenant pas de r-clique, c'est-à-dire de sous-graphe complet à r sommets, a au plus $\frac{r-2}{r-1} \times \frac{n^2}{2}$ arêtes. Le théorème de Mantel correspond alors au cas $r = 3$.

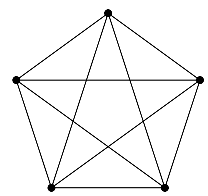
Exercice 16 On considère 21 points disposés sur un cercle. Montrer que parmi toutes les cordes reliant deux quelconques de ces points, il y en a 100 qui relient des couples de points définissant un angle au centre inférieur ou égal à 120°.

6 Corrigés

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Le graphe K_1 est simplement un point (un sommet, 0 arêtes), K_2 est un segment (2 sommets, 1 arête), K_3 est un triangle (3 sommets, 3 arêtes), K_4 est un carré dont on a dessiné également les diagonales :



Il a donc 4 sommets et $\binom{4}{2} = 6$ arêtes. Le graphe K_5 est un pentagone dont on a dessiné toutes les diagonales :

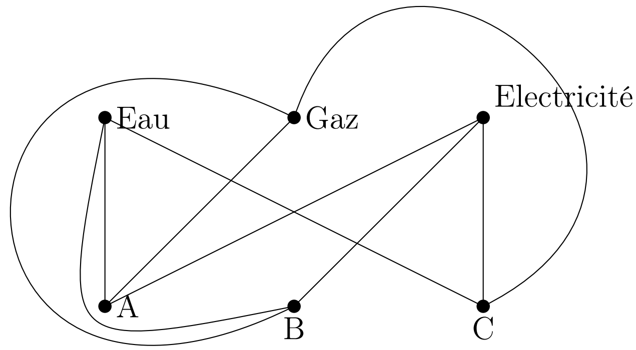


Il a 5 sommets et $\binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2} = 10$ arêtes.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

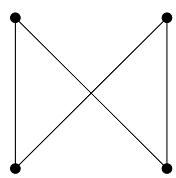
1. Soient C et C' deux chemins entre deux sommets A et B. Comme le graphe est simple, au moins l'un des deux est de longueur supérieure ou égale à 2. Alors le chemin obtenu en parcourant C, puis C' en sens inverse, est de longueur supérieure ou égale à 3, donc est un cycle, contradiction.
2. Puisque le graphe a au moins 2 sommets et est connexe, aucun sommet n'est de degré 0. On raisonne par l'absurde en supposant que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à 2. On choisit un sommet A_1. Il est de degré non nul, donc il est relié à au moins un sommet A_2. Ce dernier est de degré supérieur ou égal à 2, donc il est relié à au moins un autre sommet A_3, différent de A_2 car le graphe est simple, et différent de A_1 ce le graphe est sans cycle. On continue ainsi en construisant une suite de sommets $A_1, A_2, \ldots$ distincts. Comme le graphe n'a qu'un nombre fini de sommets, cela fournit une contradiction.
3. Initialisation : Un arbre à 1 sommet n'a pas d'arêtes, donc la propriété est vraie au rang 1.
   Hérédité : Supposons que la propriété est vraie au rang n. Soit un arbre à $n+1$ sommets. D'après la question précédente, il a au moins un sommet A de degré 1. Le graphe obtenu en supprimant ce sommet ainsi que la seule arête dont qui l'a pour extrémité nous donne un graphe à n sommets qui est toujours connexe et sans cycle, donc qui est un arbre. Par hypothèse de récurrence, il a $n-1$ arêtes. Ainsi, le graphe de départ avait n arêtes.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On peut par exemple dessiner les choses de la manière suivante :

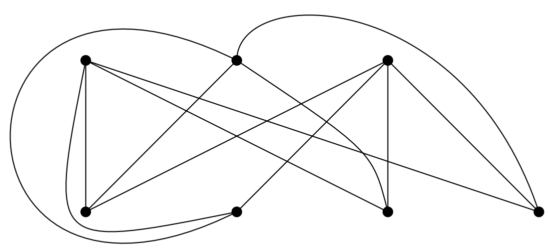


Pour la deuxième question, nous renvoyons vers le chapitre sur les graphes planaires.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Voici $K_{2,2}$:



et voici une manière de dessiner $K_{3,4}$:



Remarque : le graphe bipartite complet $K_{m,n}$ a mn arêtes.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Dans la somme des degrés des sommets, chaque arête compte double vu qu'elle relié exactement deux sommets.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On considère un graphe dont les sommets sont les membres du club, et où il y a une arête entre deux membres du club s'ils se sont serré la main. Alors le degré d'un sommet correspond au nombre de mains que la personne représentée par ce sommet a serrées. Soit p le nombre total de poignées de main (qui est aussi le nombre d'arêtes du graphe). Alors $2p$ est la somme de tous les degrés de tous les sommets. La somme des degrés des sommets de

degré pair est paire. Donc la somme des degrés des sommets de degré impair est une différence de deux nombres pairs, et est par conséquent paire.

Solution de l'exercice 7 Chaque élève a un nombre d'amis compris entre 0 et 29. Si deux élèves n'ont jamais le même nombre d'amis, alors forcément pour tout i entre 0 et 29, il existe un élève qui a i amis. Autrement dit, un élève a 0 amis, un autre en a 1, un troisième en a 2, ..., et le dernier en a 29. Mais alors ce dernier est ami avec tout le monde, et en particulier, il est ami avec celui qui n'est ami avec personne, contradiction.

Solution de l'exercice 8 La condition de l'énoncé signifie que chaque face est délimitée par au moins 4 arêtes. On considère l'ensemble

$$\{(e, F) \text{ où } e \text{ est une arête et } F \text{ une face à laquelle } e \text{ appartient}\}.$$

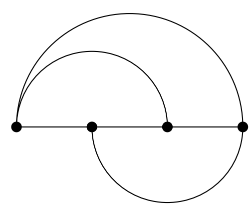
On va compter de deux manières le cardinal de cet ensemble. D'une part, chaque arête e appartient à deux faces donc intervient dans exactement deux éléments de cet ensemble. Le cardinal de l'ensemble vaut donc $2a$. D'autre part, chaque face F contient au moins 4 arêtes, donc intervient dans au moins 4 éléments de cet ensemble. Donc le cardinal de l'ensemble est supérieur ou égal à $4f$. Finalement, nous avons $2a \geq 4f$, c'est-à-dire $a \geq 2f$. En utilisant la formule d'Euler, nous avons alors

$$a \leq s + f - 2 \leq s + \frac{a}{2} - 2,$$

d'où le résultat.

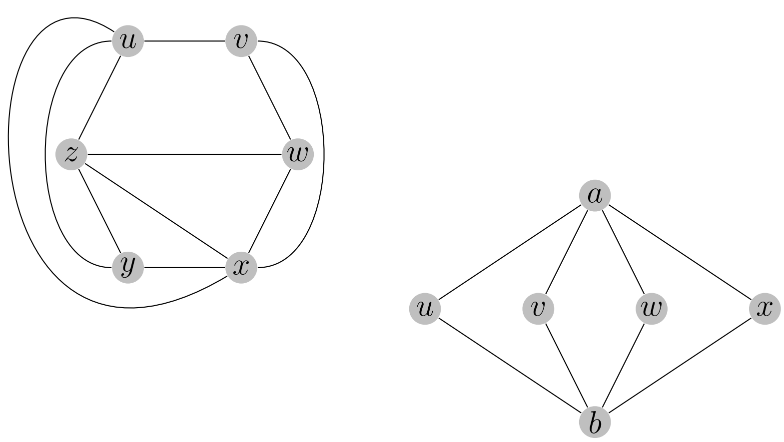
Solution de l'exercice 9

1. Une représentation planaire de K_4 est donnée par le dessin suivant :



   Il y a donc 4 sommets, 6 arêtes, et 4 faces (en comptant la face infinie) : on vérifie bien que $4 - 6 + 4 = 2$. Pour ce qui est de K_5, souvenons-nous qu'il a 5 sommets et 10 arêtes. Or $3 \times 5 - 6 = 9 < 10$, donc l'inégalité de la proposition 3 n'est pas satisfaite, et K_5 n'est pas planaire.

2. Voici des représentations planaires possibles :



On vérifie en outre que le premier graphe a 6 sommets, 9 arêtes et 7 faces, et $6-9+7=2$. Le deuxième graphe a 6 sommets, 8 arêtes et 4 faces, et $6-8+4=2$.

3. Nous avons $s=6$ et $a=9$, donc d'après la formule d'Euler, si le graphe considéré était planaire, on devrait avoir $f=2+a-s=5$. D'autre part, aucune des faces n'est un triangle. En effet, si on prend trois sommets du graphe, deux d'entre eux sont nécessairement soit des maisons, soit des usines, et ne sont donc pas reliés. Ainsi, chaque face (et la face infinie également) est délimitée par au moins quatre arêtes. Puisque chaque arête appartient à deux faces, on a $4f \leq 2a$, d'où $f \leq \frac{9}{2} < 5$, contradiction. Les différentes conduites se croiseront donc nécessairement.

Solution de l'exercice 10

1. Dès qu'il y a une arête, il faut au moins deux couleurs. Un graphe de nombre chromatique 1 est donc un graphe sans arêtes.
2. Soit un graphe bipartite (on suppose qu'il a au moins une arête), et soient I et J les deux ensembles de sommets indépendants de ce graphe. Alors on peut colorier tous les éléments de I avec une même couleur, et tous les éléments de J avec une autre couleur. Le nombre chromatique d'un graphe bipartite est donc égal à 2.
3. Dans un graphe complet, deux sommets quelconques sont reliés. Son nombre chromatique est donc égal au nombre de sommets.

Solution de l'exercice 11

1. Supposons que le degré de chaque sommet est supérieur à 6. De chaque sommet partent au moins 6 arêtes, et chaque arête relie deux sommets, donc nous avons $6s \leq 2a$, c'est-à-dire $3s \leq a$. Or nous savons que $a \leq 3s-6$, contradiction. Donc il existe un sommet de degré au plus égal à 5.
2. Nous allons raisonner par récurrence sur n. Pour $n=1$, c'est clair. Supposons que c'est vrai pour $n-1$. Soit un graphe à n sommets, simple et planaire. D'après la première question, il existe un sommet M de degré plus petit que 5. Si on l'enlève, lui ainsi que les arêtes qui partent de lui, on obtient un graphe à $n-1$ sommets que l'on peut colorier avec 6 couleurs. Si on remet M où il était, il n'est relié qu'au plus à 5 autres sommets, donc il y a au moins une couleur parmi les 6 couleurs utilisées avec laquelle nous pouvons le colorier.

Solution de l'exercice 12 Le sommet x est de degré maximal 5, on commence donc par le colorier, par exemple en jaune. Il est relié à tous les autres sommets, donc on ne peut plus colorier personne d'autre en jaune. Ensuite, on choisit un sommet de degré maximal non colorié, disons z, qui est de degré 4, et on le colorie en rouge. Il est relié à tout le monde sauf v, donc nous pouvons colorier v en rouge également. Puis on recommence le processus : u est non colorié de degré maximal 4, donc on le colorie par exemple en bleu. Il est relié à tous les sommets non encore coloriés sauf w, donc on colorie w en bleu également. Enfin, il reste y, que l'on colorie en vert. On a donc un coloriage avec quatre couleurs. D'autre part, on ne peut espérer avoir un coloriage avec seulement trois couleurs, vu que le sous-graphe formé des sommets u, z, y, x est un graphe complet à 4 sommets, de nombre chromatique 4. Le nombre chromatique cherché est donc égal à 4.

Solution de l'exercice 13 Soit M le dernier sommet colorié. Si M n'a pas été colorié avant, c'est qu'à chaque étape, l'un de ses voisins a été colorié. Ainsi, le nombre de couleurs utilisées avant de colorier M ne peut dépasser le degré $d(M)$ de M. Le nombre total des couleurs utilisées (en tenant compte de la couleur de M) ne peut donc pas dépasser $d(M)+1$. On a donc par définition du nombre chromatique

$$\chi(G) \leq \text{ nombre total de couleurs utilisées } \leq d(M)+1 \leq D(G)+1.$$

Solution de l'exercice 14

1. On représente les 4 sommets en carré et on appelle respectivement côtés et diagonales les arêtes correspondant aux côtés et aux diagonales du carré. On voit facilement qu'il existe des graphes à 4 sommets et 4 arêtes sans triangle. En revanche, si un graphe a 4 sommets et 5 arêtes, parmi ces 5 arêtes il y a au moins 3 côtés et au moins une diagonale : cela dessine au moins un triangle.
2. On raisonne par l'absurde, en supposant que chaque sommet est relié a au moins 3 autres sommets. Soit A un sommet, et soient B, C, D des sommets qui sont reliés à lui. B étant également de degré au moins 3, il est relié à C ou à D, ce qui nous fait un triangle.
3. Soit G le graphe en question, et soit A un sommet de degré supérieur ou égal à 2. Les autres sommets du graphe forment un graphe à 4 sommets sans triangle, donc avec 4 arêtes au plus. Au total, avec les deux arêtes au maximum partant de A, cela nous 6 arêtes au plus. Réciproquement, le graphe bipartite complet $K_{2,3}$ donne un graphe à 5 sommets sans triangle à 6 arêtes.

   Remarque : les graphes bipartites sont des exemples importants de graphes sans triangle, en ce sens qu'ils "optimisent" le nombre d'arêtes à nombre de sommets fixé. C'est ce qu'on voit en particulier dans l'énoncé du théorème de Mantel.

Solution de l'exercice 15

1. Soit A un sommet de G. Alors les sommets reliés à A ne peuvent être reliés entre eux, et forment par conséquent un ensemble de sommets indépendants. Ainsi, le degré de tout sommet est inférieur ou égal à x.
2. Les arêtes de G sont de deux sortes : celles reliant deux sommets de J, et celles reliant un sommet de I avec un sommet de J. Les premières sont comptées deux fois dans la somme du côté droit, les deuxièmes une seule fois. En tout, la somme est donc supérieure au nombre d'arêtes total du graphe.
3. Cette inégalité est équivalente à $(x-y)^2 \geq 0$, qui est toujours vraie. D'ailleurs on remarque que le cas d'égalité s'obtient si et seulement si $x = y$.
4. On sait que pour tout sommet $A \in J$, $d(A) \leq x$. D'autre part, il y a $n - x$ sommets dans J. Ainsi, l'inégalité de la question 2 nous donne $a \leq x(n-x)$. En appliquant la question précédente, on a
$$a \leq \frac{(x+n-x)^2}{4} = \frac{n^2}{4}.$$
   De plus, l'égalité s'obtient seulement si $x = n - x$, donc seulement si n est pair et $x = \frac{n}{2}$. Montrons que dans ce cas J est également un ensemble de sommets indépendants. En effet, comme il y a égalité, il y a également égalité dans la question 2. D'après la solution de cette dernière, cela veut dire qu'il n'y a aucune arête reliant deux sommets de J, ce qui conclut. De plus, il faut alors que le degré de chaque sommet de J soit exactement x, donc que chaque sommet de J soit relié à tous les sommets de I. Le seul graphe qui peut réaliser l'égalité est donc $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$. D'autre part, on voit facilement que ce graphe a $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ arêtes, donc il réalise bien l'égalité.

Solution de l'exercice 16 Trouvons le bon graphe sans triangle : on relie deux points si l'angle au centre qu'ils définissent est strictement supérieur à 120°. Trois tels points ne sont alors jamais reliés deux à deux, donc le graphe est sans triangle. Le nombre d'arêtes est alors inférieur ou égal à $21^2/4$, donc à 110. Dans le graphe complémentaire il y a donc $\binom{21}{2} - 110 = 100$ arêtes, ce qui conclut.