Licence Math-Info

DM Probabilités et Statistiques $N^0 1$

Correction

Exercice 0

On compte dans une population 45% d'hommes et 55% de femmes. Un homme sur trois et une femme sur cinq portent des lunettes. Quelle est la probabilité qu'une personne portant des lunettes soit une femme ?

On peut modéliser ceci par un ensemble de probabilités $\Omega = \{(H, L), (H, N), (F, L), (F, N)\}$ où H signifie homme, F femme, L lunettes et N pas de lunettes. On connaît $P(H)$, $P(F)$, $P(L|H)$ et $P(L|F)$. On cherche $P(F|L) = P(F \cap L)/P(L)$. Or $P(F \cap L) = P(L|F)P(F) = 0.55/5 = 0.11$, et la formule des probabilités totales fournit $P(L) = P(L|F)P(F) + P(L|H)P(H) = 0.45/3 + 0.11 = 0.26$. Finalement la probabilité qu'une personne portant des lunettes soit une femme est 11/26.

Exercice 1

Soient $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements d'un espace de probabilités.

1. Question facultative Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante d'événements d'un espace de probabilités (c'est-à-dire que $A_{n+1} \subset A_n \; \forall n \geq 0$). Montrer que $P(\cap_{n=0}^{\infty} A_n) = \lim_n P(A_n)$ (Indication : penser au complémentaire.)

Si les A_n forment une suite décroissante, leurs complémentaires forment une suite croissante puisque $A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow \bar{A}_n \subset \overline{A_{n+1}}$.

On a donc $P(\cup_{n=0}^{+\infty} \bar{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} P(\bar{A}_n)$.

Donc $P(\cap_{n=0}^{+\infty} A_n) = 1 - P(\cup_{n=0}^{+\infty} \bar{A}_n) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(\bar{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

2. On suppose qu'on lance une infinité de fois un dé à 6 faces. Le dé est supposé non pipé, et les lancers sont indépendants.

a. Quel espace de probabilités peut modéliser ceci ?

On peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{\mathbf{N}}$, l'ensemble des suites formées de 1, 2, 3, 4, 5 et 6. On met comme probabilité sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ la probabilité P_0 uniforme ($P_0(\{i\}) = 1/6$) car le dé n'est pas pipé, et on met la probabilité produit $P_0^{\otimes\mathbf{N}}$ sur Ω car les lancers sont indépendants.

b. On introduit les événements A_n = "On n'obtient pas 6 au n-ième lancer". Les A_n sont-ils décroissants ? Que vaut $P(A_n)$?

Les A_n ne sont pas décroissants, car on peut très bien ne pas obtenir 6 au 2ème lancer (i.e. être dans A_2) et avoir obtenu 6 au premier lancer (i.e. ne pas être dans A_1). Ainsi, $655\ldots \in A_2 \backslash A_1$.

On a $P(A_n) = 1 - P(6 \text{ au n-ième lancer}) = 5/6$.

c.On considère les événements B_n = " On n'a obtenu aucun 6 au cours des n premiers lancers". Exprimer B_n à l'aide des A_m. Les B_n sont-ils décroissants ? Que vaut $P(B_n)$?

$B_n = \cap_{m=1}^{n} A_m$.

Les B_n sont décroissants : en effet, si une suite est dans B_{n+1}, elle ne comporte aucun 6 dans ses $n + 1$ premiers termes; cela implique qu'elle ne contient aucun 6 dans ses n premiers termes, et donc elle appartient à B_n.

Les différents lancers étant indépendants, les A_m sont indépendants, et $P(B_n) = \prod_{m=1}^{n} P(A_m) = (5/6)^n$.

d. Exprimer l'événement "On n'obtient jamais 6" en fonction des A_n, puis en fonction des B_n.

"On n'obtient jamais 6" $= \cap_{n=1}^{+\infty} A_n = \cap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

e. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir 6 ?

D'après la première question, les B_n étant décroissants,
P("jamais 6") $= \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty}(5/6)^n = 0$.

f. Au bout de combien de lancers a-t-on une probabilité au moins 1/2 d'avoir obtenu au moins un 6 ?

On peut de manière équivalente chercher au bout de combien de lancers on a une probabilité **au plus** 1/2 (=1-1/2) de n'avoir obtenu **aucun** 6. On cherche donc à partir de quel n on a $P(B_n) \leq 1/2$. On doit donc avoir
$(5/6)^n \leq 1/2 \Leftrightarrow n(\ln(5) - \ln(6)) \leq -\ln 2 \Leftrightarrow n \geq \ln 2/(\ln 6 - \ln 5)$.

Puisque n est entier, on obtient $n \geq 4$. On a donc une probabilité inférieure à 1/2 de ne pas avoir obtenu de 6 au cours des 4 premiers lancers. Et par conséquent, on a une probabilité supérieure à 1/2 d'avoir eu au moins un 6 au cours des 4 premiers lancers.

g. On considère la variable aléatoire $Y = n$ si on a obtenu 6 pour la première fois au n-ième lancer et $Y = \infty$ si on n'obtient jamais 6. Quelle est la loi de Y ? Quelle est son espérance ?

Y est à valeurs dans $\mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$; on a $P(Y = 1) = P(\bar{A}_1) = 1/6$, $P(Y = 2) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) = 5/6 \times 1/6 = 5/36$, et de manière générale
$P(Y = n) = P(\bar{A}_n \cap_{k=1}^{n-1} A_k) = 1/6 \times (5/6)^{n-1} = 5^{n-1}/6^n$ si $n \in \mathbf{N}^*$.

Il reste à déterminer $P(Y = +\infty)$; on peut soit calculer $1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 5^{n-1}/6^n$, soit remarquer que $P(Y = \infty) = P($ jamais 6 $) = 0$ d'après la question précédente.

$E[Y] = \sum_{n=1}^{+\infty} n5^{n-1}/6^n$ (Remarque : si on avait $P(Y = +\infty > 0)$, on aurait $E[Y] = +\infty$). Pour calculer cette série, on utilise $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1/(1-x)$ si $|x| < 1$. C'est une série entière, de rayon de convergence 1, et on peut dériver terme à terme dans son cercle de convergence (i.e. la série des dérivées est bien la dérivée de la série), donc $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = 1/(1-x)^2$ si $|x| < 1$. On applique cette égalité avec $x = 5/6$, et on obtient
$E[Y] = \sum_{n=1}^{+\infty} n5^{n-1}/6^n = 1/6 \sum_{n=1}^{+\infty} n(5/6)^{n-1} = 1/6/(1-5/6)^2 = 6$.

Exercice 2

Une variable aléatoire X à valeurs dans $[-1, 1]$ a une densité de probabilités $f(x) = a(x+1)1_{[-1,1]}(x)$, où a est un réel.

(1) *Déterminer a et la fonction de répartition de X.*

Remarque : pour que f soit positive, on doit avoir $a \geq 0$. On doit de plus avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, soit $\int_{-1}^{1} a(x+1)dx = 1$.
Or $\int_{-1}^{1} a(x+1)dx = a[x^2/2 + x]_{-1}^{1} = 2a$.
Donc $a = 1/2$.

La fonction de répartition de X est $F(x) = P(X \geq x)$.
Donc si $x \leq -1$, $F(x) = 0$, si $x \geq 1$, $F(x) = 1$ et
si $x \in [-1, 1]$, $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t+1}{2}dt = [\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}]_{-1}^{x} = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

(2) *Calculer $E[X]$ et $E[|X|]$.*

$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x(x+1)}{2}dx = [x^3/6 + x^2/4]_{-1}^{1} = 1/3$.

De même, $E[|X|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx = \int_{-1}^{0} -\frac{x(x+1)}{2}dx + \int_{0}^{1} \frac{x(x+1)}{2}dx = [-x^3/6 - x^2/4]_{-1}^{0} + [x^3/6 + x^2/4]_{0}^{1} = 1/2$.

(3) *Quelle est la probabilité que $|X|$ soit inférieure à 0.5 ?*

$P(|X| \leq 0.5) = P(-0.5 \leq X \leq 0.5) = F(0.5) - F(-0.5) = 1/2$.

(4) *Quelle est la fonction de répartition de $|X|$? Quelle est sa densité ?*
$P(|X| \leq x) = 0$ si $x \leq 0$, $P(|X| \leq x) = 1$ si $x \geq 1$,
et si $x \in [0,1]$, $P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = F(x) - F(-x) = x$.
On obtient la densité de $|X|$ en dérivant la fonction de répartition, soit ici $f_{|X|}(x) = 1_{[0,1]}(x)$: $|X|$ suit donc une loi uniforme sur $[0,1]$, et on peut vérifier le calcul de la question 2, i.e $E[|X|] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{|X|}(x)dx = \int_0^1 xdx = 1/2$.

Exercice 3

On dispose de trois jetons, marqués "1", "2" et "3". On en tire 2 au hasard, de façon équiprobable.

(1) *Quel espace de probabilités peut-on prendre ?*
On peut par exemple prendre $\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ avec probabilité uniforme.
On note ensuite X le numéro du plus petit, Y le numéro du plus grand.

(2) *Donner la loi du couple (X,Y).*
$P((X,Y) = (1,2)) = 1/3$, $P((X,Y) = (1,3)) = 1/3$ et $P((X,Y) = (2,3)) = 1/3$.

(3) Donner la loi de X, celle de Y et leurs espérances.
X est à valeurs dans $\{1,2\}$;
$P(X = 1) = P((X,Y) = (1,2)) + P((X,Y) = (1,3)) = 2/3$; donc $P(X = 2) = 1/3$.
Y est à valeurs dans $\{2,3\}$;
$P(Y = 2) = P((X,Y) = (1,2)) = 1/3$. Donc $P(Y = 3) = 2/3$.
$E[X] = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) = 4/3$.
$E[Y] = 2 \times P(Y = 2) + 3 \times P(Y = 3) = 8/3$.

Exercice 4

Lors d'une période de reproduction, un insecte d'un certain type pond un nombre X d'oeufs, avec $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda \in]0,+\infty[$. Un oeuf donne naissance à un insecte avec la probabilité p, $p \in]0,1[$. La question du naturaliste est : quelle est la probabilité qu'un insecte donne naissance à m insectes ? Moyennant des hypothèses naturelles sur la viabilité des œufs pondus, on est amené à supposer que le nombre Y d'insectes qui vont naître de ces œufs est une variable aléatoire telle que : $P(Y = j|X = k) = C_k^j p^j (1-p)^{k-j}$ pour $j \leq k$, $P(Y = j|X = k) = 0$ pour $j \geq k+1$.

a. *Quelle est la loi de Y ?*

Y est à valeurs dans $\mathbf{N}$, et on peut appliquer la formule des probabilités totales :
$P(Y = j) = \sum_{k \in \mathbf{N}} P(Y = j|X = k)P(X = k) = \sum_{k \geq j} C_k^j p^j (1-p)^{k-j} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
$= e^{-\lambda} \sum_{k \geq j} \frac{k!}{j!(k-j)!} p^j (1-p)^{k-j} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{j!} p^j \sum_{k \geq j} \frac{(1-p)^{k-j}\lambda^k}{(k-j)!}$.
On peut alors faire le changement d'indice $k' = k - j$, et remarquer $\lambda^k = \lambda^j \lambda^{k-j}$; il vient

$$P(Y = j) = \frac{e^{-\lambda}}{j!} p^j \lambda^j \sum_{k' \in \mathbf{N}} \frac{(1-p)^{k'} \lambda^{k'}}{k'!} = \frac{e^{-\lambda}}{j!} (p\lambda)^j \exp((1-p)\lambda) = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!}$$

b. *Quelle est la loi de $X - Y$?*

Puisque $Y \geq X$, et que X et Y sont entiers, $X - Y$ est à valeurs dans $\mathbf{N}$. De plus, $P(X-Y=k) = \sum_{l=0}^{+\infty} P(X-Y=k|X=l)P(X=l) =$
$= \sum_{l=0}^{+\infty} P(Y=l-k|X=l)P(X=l) = \sum_{l=k}^{+\infty} C_l^{l-k} p^{l-k}(1-p)^k \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda}$.
On pose alors $l' = l-k$, et on obtient
$P(X-Y=k) = \sum_{l'=0}^{+\infty} \frac{1}{l'!} k! p^{l'} (1-p)^k \lambda^k \lambda^{l'} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \frac{(1-p)^k \lambda^k}{k!} \sum_{l'=0}^{+\infty} \frac{p^{l'} \lambda^{l'}}{l'!}$

Finalement,

$$P(X-Y=k) = e^{-\lambda} \frac{(1-p)^k \lambda^k}{k!} e^{\lambda p} = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}$$

c. *Quelle est la loi du couple* $(Y, X-Y)$ *?*

Le couple est à valeurs dans $\mathbf{N^2}$, et
$P((Y, X-Y) = (j,k)) = P(Y=j \text{ et } X-Y=k) = P(Y=j \text{ et } X=j+k) = P(Y=j|X=j+k)P(X=j+k)$.

Finalement,

$$P((Y, X-Y) = (j,k)) = C_{j+k}^j p^j (1-p)^k \frac{\lambda^{j+k}}{(j+k)!} e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^j}{j!} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} e^{-\lambda}$$