Licence Math-Info
DM Probabilités et Statistiques N^{0}1
A rendre la semaine du octobre

Exercice 0

On compte dans une population 45% d'hommes et 55% de femmes. Un homme sur trois et une femme sur cinq portent des lunettes. Quelle est la probabilité qu'une personne portant des lunettes soit une femme ?

Exercice 1

Soient $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements d'un espace de probabilités.

(1) *Question facultative* Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante d'événements d'un espace de probabilités (c'est-à-dire que $A_{n+1} \subset A_n \, \forall n \geq 0$). Montrer que $P(\cap_{n=0}^{\infty} A_n) = \lim_n P(A_n)$ (Indication : penser au complémentaire.)

(2) On suppose qu'on lance une infinité de fois un dé à 6 faces. Le dé est supposé non pipé, et les lancers sont indépendants.
   (a) Quel espace de probabilités peut modéliser ceci ?
   (b) On introduit les événements A_n = "On n'obtient pas 6 au n-ième lancer". Les A_n sont-ils décroissants ? Que vaut $P(A_n)$?
   (c) On considère les événements B_n = " On n'a obtenu aucun 6 au cours des n premiers lancers". Exprimer B_n à l'aide des A_m. Les B_n sont-ils décroissants ? Que vaut $P(B_n)$?
   (d) Exprimer l'événement "On n'obtient jamais 6" en fonction des A_n, puis en fonction des B_n.
   (e) Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir 6 ?
   (f) Au bout de combien de lancers a-t-on une probabilité au moins 1/2 d'avoir obtenu au moins un 6 ?
   (g) On considère la variable aléatoire $Y = n$ si on a obtenu 6 pour la première fois au n-ième lancer et $Y = \infty$ si on n'obtient jamais 6. Quelle est la loi de Y ? Quelle est son espérance ?

Exercice 2

Une variable aléatoire X à valeurs dans $[-1, 1]$ a une densité de probabilités $f(x) = a(x + 1)1_{[-1,1]}(x)$, où a est un réel.

(1) Déterminer a et la fonction de répartition de X.
(2) Calculer $E[X]$ et $E[|X|]$.
(3) Quelle est la probabilité que $|X|$ soit inférieure à 0.5 ?
(4) Quelle est la fonction de répartition de $|X|$? Quelle est sa densité ?

Exercice 3

On dispose de trois jetons, marqués "1", "2" et "3". On en tire 2 au hasard, de façon équiprobable.

(1) Quel espace de probabilités peut-on prendre ?
   On note ensuite X le numéro du plus petit, Y le numéro du plus grand.
(2) Donner la loi du couple (X, Y).
(3) Donner la loi de X, celle de Y et leurs espérances.

Exercice 4

Lors d'une période de reproduction, un insecte d'un certain type pond un nombre X d'oeufs, avec $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda \in]0, +\infty[$. Un oeuf donne naissance à un insecte avec la probabilité p, $p \in]0, 1[$. La question du naturaliste est : *quelle est la probabilité qu'un insecte donne naissance à m insectes ?* Moyennant des hypothèses naturelles sur la viabilité des œufs pondus, on est amené à supposer que le nombre Y d'insectes qui vont naître de ces œufs est une variable aléatoire telle que : $P(Y = j|X = k) = C_k^j p^j (1-p)^{k-j}$ pour $j \leq k$, $P(Y = j|X = k) = 0$ pour $j \geq k + 1$.

a. Quelle est la loi de Y ?

b. Quelle est la loi de $X - Y$?

c. Quelle est la loi du couple $(Y, X - Y)$?