Licence Math-Info
DM Probabilités et Statistiques $N^0 2$
A rendre la semaine du décembre

Exercice 1

Alice et Bob jouent aux fléchettes en lançant leurs fléchettes en même temps, au rythme de une fléchette toutes les minutes (sur deux cibles différentes). La probabilité que Alice touche le centre est p, la probabilité que Bob touche le centre est q, et tous les lancers sont supposés indépendants. Ils s'arrêtent dès que les deux ont touché le centre au moins une fois. On note m le premier instant où l'un des deux touche le centre, et M le moment où ils s'arrêtent.

a. On appelle A, respectivement B, le premier instant où Alice (respectivement Bob) touche le centre. Donner la loi de A, de B et du couple (A, B).

b. Exprimer m et M en fonction de A et B.

c. Déterminer la loi de (m, M) (*Commencez par regarder* $P((m, M) = (1, 1))$, $P((m, M) = (1, 2)), P((m, M) = (2, 1))$, *etc si vous avez du mal*)

d. m et M sont-ils indépendants ?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \alpha k 2^{-k}$ o'u α est une constante.

a. Déterminer α, puis donner la fonction génératrice de X. (On précisera son ensemble de définition). *Question facultative : que vaut* $E[X]$ *?*

On rappelle $\forall |x| < 1, \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n x^{n-1} = 1/(1-x)^2$

b. On lance un dé à X faces (donc le dé dépend du résultat de X), et on note Y le résultat. Que vaut $P(Y = k | X = n)$?

c. Montrer que Y suit une loi géométrique, dont on déterminera le paramètre.

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$, respectivement $[-1, 1]$. Donner la loi de (X, Y), et déterminer $P(X \leq Y)$. *On pourra utiliser, mais ce n'est pas indispensable,* $\int\int_A dxdy =$ *aire de* A

Exercice 4

On rappelle que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi normale $N(m, \sigma^2)$ (d'espérance m et de variance σ^2) est $E[e^{itX}] = e^{itm} e^{-t^2\sigma^2/2}$.

Soit $(X_1, \dots X_n)$ n variables aléatoires indépendantes toutes de loi normale $N(0, 1)$. Quelle est la fonction caractéristique de $Y = \sum_{i=1}^n X_i$? Quelle est la loi de Y ?

Exercice 5

Une banque accepte de ses clients des rouleaux de pièces d'un euro sans contrôler le nombre de pièces (en principe 25). On suppose que 3% des rouleaux contiennent 24 pièces, 96% 25 pièces et 1% 26 pièces.

a. Soit X la v.a.r. égale au nombre de pièces d'un rouleau. Calculer l'espérance et la variance de X.

b. Calculer les probabilités pour que 400 rouleaux contiennent moins de 10000 pièces, moins de 9990 pièces et moins de 9980 pièces.

Indication : penser au théorème central limite