Licence Math-Info

DM Probabilités et Statistiques $N^0 2$

Correction

Exercice 1

Alice et Bob jouent aux fléchettes en lançant leurs fléchettes en même temps, au rythme de une fléchette toutes les minutes (sur deux cibles différentes). La probabilité que Alice touche le centre est p, la probabilité que Bob touche le centre est q, et tous les lancers sont supposés indépendants. Ils s'arrêtent dès que les deux ont touché le centre au moins une fois. On note m le premier instant où l'un des deux touche le centre, et M le moment où ils s'arrêtent.

a. On appelle A, respectivement B, le premier instant où Alice (respectivement Bob) touche le centre. Donner la loi de A, de B et du couple (A, B).

A et B suivent une loi géométrique de paramètre respectivement p et q : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A = k) = (1-p)^{k-1}p$ et $P(B = k) = (1-q)^{k-1}q$. De plus, les lancers étant tous supposés indépendants, A et B sont indépendants, et on a donc $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, P((A, B) = (k, l)) = pq(1-p)^{k-1}(1-q)^{l-1}$.

b. Exprimer m et M en fonction de A et B.

m est le minimum de A et B, et M est le maximum de A et B.

c. Déterminer la loi de (m, M) (Commencez par regarder $P((m, M) = (1, 1))$, $P((m, M) = (1, 2)), P((m, M) = (2, 1))$, etc si vous avez du mal)

(m, M) est à valeurs dans $\{(k, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / k \leq l\}$. On a $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $k < l$, $P((m, M) = (k, l)) = P((A = k \text{ et } B = l) \text{ ou } (A = l \text{ et } B = k))$. Puisque $k < l$, ces deux événements sont disjoints, et

$P((m, M) = (k, l)) = pq((1-p)^{k-1}(1-q)^{l-1} + (1-p)^{l-1}(1-q)^{k-1}$.

De plus,

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P((m, M) = (k, k)) = P(A = k \text{ et } B = k) = pq(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}$.

d. m et M sont-ils indépendants ?

m et M ne sont pas indépendants : en effet $P((m, M) = (2, 1)) = 0$, mais $P(m = 2) \neq 0$ (puisque $P(m = 2) \geq P((m, M) = (2, 3)) > 0$) et de même $P(M = 1) = P(A = B = 1) \neq 0$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \alpha k 2^{-k}$ o'u α est une constante.

a. Déterminer α, puis donner la fonction génératrice de X. (On précisera son ensemble de définition). Question facultative : que vaut $E[X]$?

On rappelle $\forall |x| < 1, \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n x^{n-1} = 1/(1-x)^2$

P doit être une probabilité, donc on doit avoir $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} P(X = k) = 1$. Or $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k 2^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k (\frac{1}{2})^{k-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{4}} = 2$.

Donc $\alpha = 1/2$.

La fonction génératrice de X est $g(s) = E[s^X] = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} s^k \times \alpha k 2^{-k} = \frac{s}{4} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k (\frac{s}{2})^{k-1}$. Cette série converge pour $|s/2| < 1$; g est donc définie sur $]-2, 2[$ et on a

$g(s) = \frac{s}{4} \frac{1}{(1-\frac{s}{2})^2} = \frac{s}{(2-s)^2}$.

Pour calculer l'espérance de X, On peut utiliser $E[X] = g'(1)$, et on obtient $E[X] = 3$. (On aurait aussi pu calculer directement $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k P(X = k)$ en utilisant $\sum_{n \geq 2} n(n-1) x^{n-2} = 2/(1-x)^3$)

b. On lance un dé à X faces (donc le dé dépend du résultat de X), et on note Y le résultat. Que vaut $P(Y = k | X = n)$?

Lorsqu'on sait que $X = n$, Y suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots n\}$. On a donc $\forall 1 \leq k \leq n$ entier, $P(Y = k | X = n) = 1/n$ (et $P(Y = k|X = n) = 0$ si $k > n$).

c. Montrer que Y suit une loi géométrique, dont on déterminera le paramètre.

Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, pour déterminer $P(Y = k)$, on va utiliser la formule des probabilités totales en prenant comme partition les événements $(X = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a donc

$P(Y = k) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(Y = k|X = n)P(X = n) = \sum_{n\geq k} \frac{1}{n}\alpha n 2^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq k} 2^{-n}$.

En faisant le changement d'indice $m = n - k$, on obtient finalement

$P(Y = k) = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-k-m} = 2^{-k-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2^{-k} = (\frac{1}{2})^{k-1}(\frac{1}{2})$.

Y suit donc une loi géométrique de paramètre $1/2$.

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$, respectivement $[-1, 1]$. Donner la loi de (X, Y), et déterminer $P(X \leq Y)$. On pourra utiliser, mais ce n'est pas indispensable, $\int\int_A dxdy =$ aire de A

X et Y étant indépendantes, la densité du couple est le produit des densités, et (X, Y) a donc pour densité $1_{[0,1]}(x) \times \frac{1}{2}1_{[-1,1]}(y)$. C'est la fonction qui vaut $\frac{1}{2}$ si $(x, y) \in [0, 1] \times [-1, 1]$ et 0 ailleurs.

On a $P(X \leq Y) = \int_{x\leq y} 1_{[0,1]}(x) \times \frac{1}{2}1_{[-1,1]}(y)dxdy = \frac{1}{2}\int_A dxdy$ où A est l'ensemble $\{(x, y) \in [0, 1] \times [-1, 1]/\, x \leq y\}$. A est donc un triangle, d'aire $\frac{1}{2}$. Donc $P(X \leq Y) = \frac{1}{4}$.

On aurait aussi pu calculer l'intégrale en commençant par exemple par fixer x, et en faisant varier y de x à 1 : $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}\int_0^1 dx(\int_x^1 dy) = \frac{1}{2}\int_0^1 dx(1 - x) = \frac{1}{2}[x - \frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{4}$.

Exercice 4

On rappelle que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi normale $N(m, \sigma^2)$ (d'espérance m et de variance σ^2) est $E[e^{itX}] = e^{itm}e^{-t^2\sigma^2/2}$.

Soit $(X_1, \dots X_n)$ n variables aléatoires indépendantes toutes de loi normale $N(0, 1)$. Quelle est la fonction caractéristique de $Y = \sum_{i=1}^n X_i$? Quelle est la loi de Y ?

$E[e^{itY}] = E[\prod_{i=1}^n e^{itX_i}]$. Les X_i étant indépendantes, on obtient

$E[e^{itY}] = \prod_{i=1}^n E[e^{itX_i}] = (e^{-t^2/2})^n = e^{-nt^2/2}$. On reconnaît la fonction caractéristique d'une loi normale d'espérance 0, et de variance n.

Exercice 5

Une banque accepte de ses clients des rouleaux de pièces d'un euro sans contrôler le nombre de pièces (en principe 25). On suppose que 3% des rouleaux contiennent 24 pièces, 96% 25 pièces et 1% 26 pièces.

a. *Soit X la v.a.r. égale au nombre de pièces d'un rouleau. Calculer l'espérance et la variance de X.*

On a $P(X = 24) = 0.03$, $P(X = 25) = 0.96$ et $P(X = 26) = 0.01$. Donc $E[X] = 24.98$ et $E[X^2] = 624.04$, soit $Var(X) = 0.0396$.

b. *Calculer les probabilités pour que 400 rouleaux contiennent moins de 10000 pièces, moins de 9990 pièces et moins de 9980 pièces.*

Indication : penser au théorème central limite

On note X_i le nombre de pièces contenues dans le rouleau i, et on suppose que le nombre de pièces des différents rouleaux sont indépendants.

Le nombre total de pièces dans les 400 rouleaux est donc $\sum_{i=1}^{400} X_i$ et on cherche $P(\sum_{i=1}^{400} X_i \leq 10000)$, $P(\sum_{i=1}^{400} X_i \leq 9990)$, et $P(\sum_{i=1}^{400} X_i \leq 9980)$.

Or on peut appliquer le théorème central limite aux X_i, puisque les X_i sont indépendantes, de même loi, et de variance finie. Donc en utilisant $m = 24.98$ et $\sigma = \sqrt{0.0396} \simeq 0.2$, on obtient que $Y = (1/400 \sum_{i=1}^{400} X_i - 24.98)/(0.2/20) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{400} X_i - 2498$ suit approximativement une loi normale centrée réduite.

Il ne reste plus qu'à exprimer les probabilités cherchées en fonction de Y :

$P(\sum_{i=1}^{400} X_i \leq 10000) = P(Y \leq 2) \simeq 0.9772$
$P(\sum_{i=1}^{400} X_i \leq 9990) = P(Y \leq -0.5) \simeq 0.3085$, et
$P(\sum_{i=1}^{400} X_i \leq 9980) = P(Y \leq -3) \simeq 0.00135$.

Donc on peut s'attendre raisonnablement à trouver entre 9980 et 10000 pièces dans 400 rouleaux.