Parcours Math-Info　　　　　　　　　　　　　　　　　　Novembre 2004

Probabilités-Statistiques

Devoir surveillé　　　　　　　　Durée 1h30　　　　　　　　Documents non autorisés

Responsable : E. Amar

Question de cours Énoncer le théorème de Bayes.

Problème

Ce problème est tiré du livre de A. Jacquard, "La science à l'usage des non-scientifiques".

Deux médecins, loin de tout laboratoire d'analyse doivent soigner un patient. Compte tenu des symptômes, la maladie du patient est soit microbienne, soit virale.

L'expérience du médecin A le pousse à penser que la maladie est microbienne à 80%, donc virale à 20%.

Si on note les événements

$M :=$ "le microbe est réellement présent",

$M^c =$ "le microbe n'est pas réellement présent" ;

alors pour le médecin A, on a $P_A(M) = 0,8$.

Son confrère, le médecin B pense au contraire que la maladie est virale à 80% donc microbienne à 20%, i.e. $P_B(M) = 0,2$.

Les traitements pour les maladies microbiennes étant différents de ceux pour les maladies virales, il faut prendre une décision.

Heureusement nos médecins ont une mallette laboratoire qui leur permet d'analyser des prélèvements pris sur le patient.

Malheureusement cette mallette est peut fiable, en effet si l'on note les événements :

$O :=$ "l'analyse donne la présence du microbe" i.e. le microbe est observé ;

O^c l'événement contraire i.e. le microbe n'est pas observé ;

l'expérience montre que l'on a, à l'occasion d'un prélèvement :

$P(O/M) = 0,8$; $P(O^c/M) = 0,2$

$P(O/M^c) = 0,1$; $P(O^c/M^c) = 0,9$.

Sachant le peu de fiabilité de leur mallette, les deux médecins font 5 prélèvements indépendants sur ce même patient. Les résultats qu'ils observent sont les suivants :

$O_1,\ O_2^c, O_3, O_4^c, O_5$, où on a mis en indice le numéro du prélèvement.

On admet que l'on a indépendance des probabilités conditionnelles lors de ces prélèvements :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_5/M) = P(A_1/M) \times \cdots \times P(A_5/M)$$

et

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_5/M^c) = P(A_1/M^c) \times \cdots \times P(A_5/M^c),$$

où A_j est le résultat du $j$ième prélèvement, $A_j = O_j$ ou $A_j = O_j^c$.

1- On pose $Obs = O_1 \cap O_2^c \cap O_3 \cap O_4^c \cap O_5$ le résultat de l'observation après les 5 prélèvements. Calculer la probabilité de Obs sachant que le microbe est réellement présent chez le patient, i.e. $P(Obs/M)$.

2- Calculer la probabilité de Obs sachant que le microbe n'est pas réellement présent chez le patient, c-à-d $P(Obs/M^c)$.

3- Calculer, pour le médecin A, la probabilité de l'observation, $P_A(Obs)$.

4- Calculer pour le médecin B, la probabilité de l'observation, $P_B(Obs)$.

5- Calculer pour le médecin A la probabilité que la présence du microbe soit réelle compte tenu de l'observation, i.e. $P_A(M/Obs)$.

6- Calculer pour le médecin B la probabilité que la présence du microbe soit réelle compte tenu de l'observation, i.e. $P_B(M/Obs)$.

7- Ces deux médecins vont-ils traiter de la même manière ce patient ?